

ESTUDO TEÓRICO DA ESTABILIDADE LATERAL DE HASTES

SUBMETIDAS A UMA PROTENSÃO EXTERNA


GIL AUGUSTO TAVARES

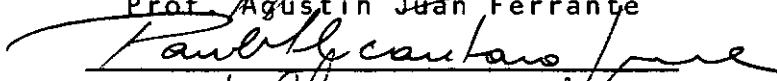
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).


Aprovada por:


Prof. Luis Bevilacqua

(Presidente)


Prof. Agustin Juan Ferrante


Prof. Paulo Alcântara Gomes


Prof. Solly Andy Segenreich

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

JANEIRO DE 1977

"Nas planícies da hesitação branqueiam os ossos de incontestáveis milhões, os quais, na alvorada da vitória, sentaram-se para descansar e descansando morreram ..."

"Dedico este trabalho a ORLINDA
e LUIZ , meus pais, como prova
de amor, respeito e admiração
que tenho por eles."

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Luis Bevilacqua, orientador e amigo de todas as horas que, com segurança e sabedoria, pode mostrar-me o caminho a seguir.
- À Escola de Engenharia Mauã, pelos seus incentivos à pesquisa e ao aprimoramento do ensino a mim demonstrados.
- Aos Profs. Liu Hsu, Raúl Feijóo e Cesar Camacho^(*) e aos colegas Abímael Dourado e Augusto Galeão, pelas discussões que me proporcionaram, fazendo com que eu pudesse melhorar este trabalho.
- Aos meus irmãos: Luiz, Maria Izabel, Margarida Maria e Maria Emília, pela compreensão e apoio.
- Aos funcionários da Biblioteca Central e do Núcleo de Computação Eletrônica, pelo despreendimento e solicitude.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.
- A todos aqueles que direta ou indiretamente, associados à boa vontade e espírito de cooperação, fizeram com que eu, assim sendo, pudesse vencer mais uma etapa proposta em minha vida.

(*) IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

RÉSUMÉ

La stabilité latérale de poutres soumises à une "protension" externe est étudiée par l'application du "Critère Dynamique de Stabilité", à l'aide de la Méthode de Rayleigh - Ritz.

Une étude de bifurcation est entreprise, en tenant compte des termes non-linéaires pour un des cas considérés. En outre, on fait une discussion de la stabilité basée sur les paramètres de l'équation caractéristique obtenue du problème des valeurs propres .

SINOPSE

É investigada a estabilidade lateral de hastes submetidas a uma protensão externa aplicando-se o "Critério Dinâmico de Estabilidade", via Método de Rayleigh-Ritz.

Faz-se um estudo de bifurcação tendo-se em conta os termos não-lineares para um dos casos considerados, bem como a discussão da estabilidade por meio dos parâmetros da equação característica obtida do problema de autovalores.

ABSTRACT

The lateral stability of beams submitted to an external "protension" is investigated by applying the "Dynamic Criteria of Stability", via the Rayleigh-Ritz Method.

An analysis of bifurcation taking into account the non-linear terms, for one of the considered cases is made, as well as a discussion on stability by means of the parameters of the characteristic equation obtained from the eigenvalue problem.

INDEX

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Introdução Histórica	1
1.2 - Generalidades	2
1.3 - Descrição da Estrutura	3
 CAPÍTULO II - DA ESTABILIDADE	6
2.1 - Conceito de Estabilidade	6
2.1.1 - Introdução	6
2.1.2 - Estabilidade do Equilíbrio	9
2.2 - Critérios de Estabilidade	14
2.2.1 - Critério Estático	15
2.2.2 - Critério da Energia	17
2.2.2.1 - Sistema Estrutural	17
2.2.2.2 - Estabilidade de um Estado de Equi líbrio	18
2.2.2.3 - Considerações sobre os Quatro Pontos Críti cos	29
2.2.2.3.1 - Ponto Limite	29
2.2.2.3.2 - Ponto de Bifurcação Assimétrico	31
2.2.2.3.3 - Ponto de Bifurcação Simétrico Es tável	33
2.2.2.3.4 - Ponto de Bifurcação Simétrico Ins tável	34
2.2.3 - Os Dois Teoremas Fundamentais	39
2.2.4 - Critério Dinâmico de Estabilidade	40
 CAPÍTULO III - DEDUÇÃO DAS ENERGIAS	55
3.1 - Potencial Elástico	55

3.2 - Energia Cinética (T)	61
3.3 - Energia Potencial Total do Sistema (Π)	63
3.3.1 - Energia de Deformação do sistema (V)	64
3.3.1.1 - Energia Interna Inicial (U_0)	64
3.3.1.2 - Energia de Deformação (V_0)	65
3.3.1.3 - Trabalho das Molas (V_1)	71
3.3.1.4 - Trabalho das Forças Externas (W)	74
 CAPÍTULO IV - MONTAGEM E MINIMIZAÇÃO DO FUNCIONAL	84
4.1 - Montagem do Funcional	84
4.2 - Aplicação do Princípio de Hamilton	86
4.3 - Minimização do Funcional (L)	86
4.4 - Equações de Euler-Lagrange e Condições de Contorno Naturais	92
4.5 - Condições de Contorno Impostas ou Geométricas - Comentários	98
 CAPÍTULO V - APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ	100
5.1 - Considerações	100
5.2 - Aplicação do Método ao Problema	100
 CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	109
6.1 - Aplicação a um Estudo Não Linear	109
6.2 - Comentários dos Resultados	125
6.3 - Estudo Paramétrico	138
6.4 - Sugestões	144
 BIBLIOGRAFIA	146
 APÊNDICE I - CONCEITO DE ESTABILIDADE MATERIAL	152

APÊNDICE II - SISTEMAS HOLONÔMICOS, NÃO HOLONÔMICOS E ESCLERONÔMICOS	154
APÊNDICE III - CÁLCULO DAS VARIAÇÕES	156
APÊNDICE IV - PRINCÍPIOS VARIACIONAIS	173
APÊNDICE V - MÉTODO DAS PARTES PROPORCIONAIS OU MÉTODO DAS CORDAS	180
APÊNDICE VI - ESPAÇO DE HILBERT	182
APÊNDICE VII - MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ	183
APÊNDICE VIII - ANÁLISE NUMÉRICA	193

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO HISTÓRICA

A grande importância que hoje em dia tem sido dada ao estudo da "Dinâmica de Sistemas", em particular ao estudo da "Estabilidade do Equilíbrio" mostra a necessidade que se tem em desenvolver estudos nesta área de pesquisa .

As hastes com protensão externa foram criadas no começo deste século e sua aplicação foi pouco difundida. Isto se deve, em parte, ao fato de que estes tipos de estruturas ainda pouco estudadas são altamente instáveis. A tarefa a que nos propomos neste trabalho é justamente esta: relativa ao estudo da estabilidade do equilíbrio dessa estrutura sem o usual travamento em seu plano de instabilidade. Estas estruturas são muitas vezes identificadas como "hastes armadas" ou "vigas vagoão" por se assemelharem com um tipo de estrutura componente do chassis de vagões de estrada de ferro.

As hastes armadas possuem protensão externa, e foi baseado nessa estrutura que se deu origem ao estudo da protensão interna comumente usada em engenharia.

1.2 - GENERALIDADES

O problema da flambagem lateral é um pouco mais complexo que os estudados em colunas carregadas axialmente. Uma haste de seção delgada e solicitada em seu plano de maior rigidez à flexão pode flambar lateralmente se ela não estiver impedida de se deslocar nesta direção, que geralmente é horizontal. A solicitação que provoca este fenômeno pode ser carregamentos longitudinais e transversais ou os dois simultaneamente. A flambagem lateral é de importância no projeto de hastes sem travamento lateral especialmente quando a rigidez à flexão da haste no plano dos esforços é grande em comparação com a rigidez à flexão lateral.

Se a solicitação estiver abaixo do seu valor crítico, a estrutura será estável, caso contrário ocorrerá a instabilidade. Com o acréscimo da solicitação, a configuração da haste torna-se-á instável a partir de um determinado valor (correspondente ao menor modo de vibração). A solicitação correspondente a este valor e que nos dá a última alternativa possível de equilíbrio é a carga crítica da estrutura.

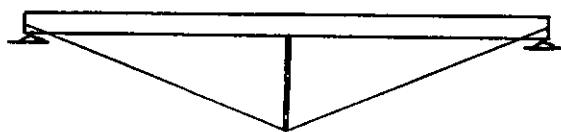
O problema da flambagem lateral de hastes de grande altura e seção retangular foi primeiro considerado por Prandtl e Michell^[13]. Trabalhando independentemente, ambos publicaram no mesmo ano a "Teoria da flambagem lateral de vigas" submetidas a carregamentos transversais, chegando substancialmente à mesma solução. Novos progressos foram devidos

a Timoshenko^[2] que, derivando da equação diferencial fundamental da torção para vigas I simétricas, investigou a flambagem lateral de vigas submetidas a cargas transversais. Mais recentemente destaca-se Galambos^[32] com seu estudo considerando o comportamento anelástico do material.

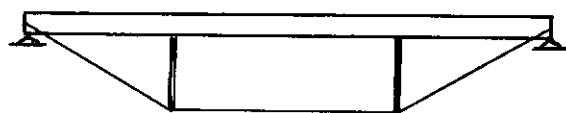
1.3 - DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA

A haste com protensão externa é uma estrutura plana, internamente hiperestática e isostática externamente. Define-se como sendo "grau de redundância" ou "grau de hiperestaticidade" (g) ao número de vínculos que é preciso liberar para que a estrutura torne-se isostática, no caso $g=0$. Por se tratar de uma estrutura internamente hiperestática, é possível calcular os esforços solicitantes e reações de vínculos externos com as equações da estática.

O conjunto da estrutura é constituído de uma haste, um, dois ou mais montantes e um cabo, como mostra a figura (1.1). No nosso estudo está se considerando um único montante.



UM MONTANTE



DOIS MONTANTES

FIGURA (1.1)

Existem dois casos em estudo. O primeiro trata da situação em que o montante acha-se engastado perfeitamente à haste (chamado de CASO I) e a sua extremidade inferior, por onde passa o cabo, está livre de sofrer qualquer deslocamento, como mostra a figura (3.10). Com a movimentação da estrutura, a reação que o montante provoca na haste (proveniente da tensão no cabo) será considerada como sendo esforço externo, muda de posição. Por essa razão nos deparamos com um problema "não conservativo".

O segundo caso (chamado de CASO II) trata da situação em que o montante acha-se ligado à haste através de uma mola de torção de rigidez K_2 e sua extremidade inferior está impedida de sofrer deslocamentos horizontais, como mostra a figura (3.6).

Para os dois casos existem duas condições de vínculos nas extremidades. Na primeira condição tem-se restrição com relação à torção nas duas extremidades. Este vínculo é uma "espécie de garfo" que impede a rotação. Na segunda condição tem-se o garfo somente em uma extremidade; na outra extremidade existe uma mola de torção de rigidez K_1 .

Se $K_1=0$, esta extremidade fica livre para girar, se $K_1=\infty$, haverá um engastamento. A figura (1.2) nos dá a idéia dos vínculos, e a figura (3.5) nos dá a idéia da posição de K_1 .

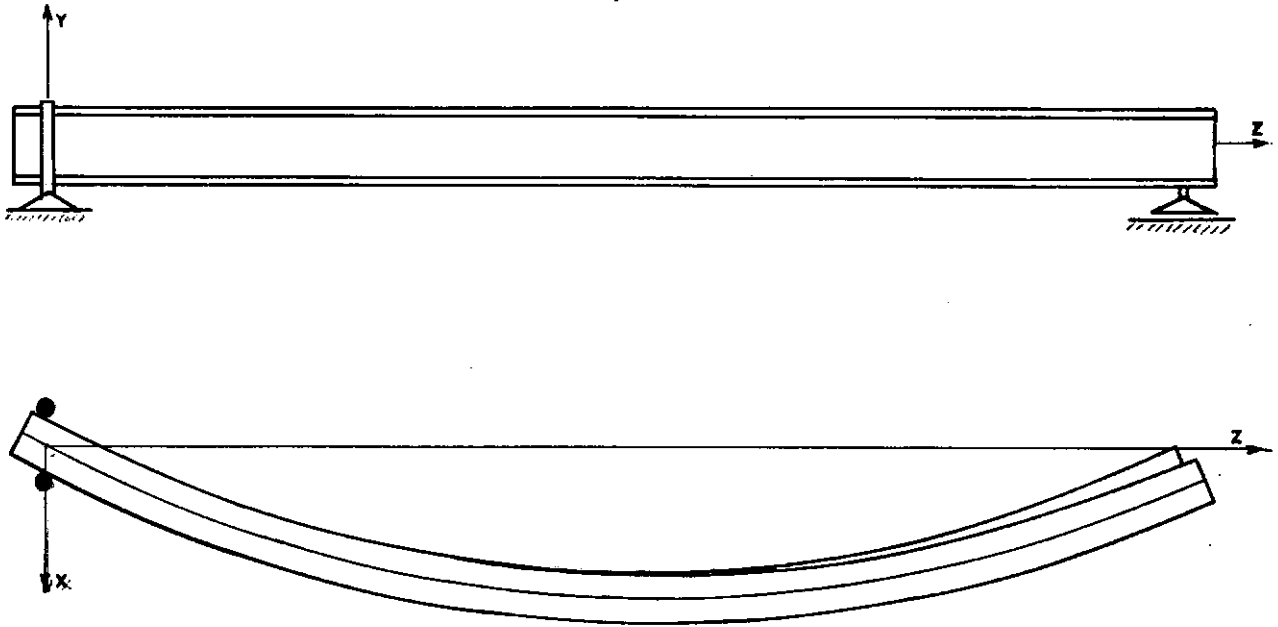


FIGURA (L2)

CAPÍTULO II

DA ESTABILIDADE

2.1 - CONCEITO DE ESTABILIDADE

2.1.1 - INTRODUÇÃO

Distinguem-se dois tipos de estabilidade:

- a) estabilidade material
- b) estabilidade estrutural

O primeiro tipo é uma condição que só depende das propriedades do material e que se designa por "condição de estabilidade material". Não iremos nos preocupar com este primeiro tipo pois será suposto neste trabalho que o material seja estável nos limites a que se propõe este estudo. No Apêndice I está descrito o que vem a ser a estabilidade material.

Consideraremos neste estudo apenas o problema da estabilidade estrutural. Do ponto de vista prático, uma configuração de equilíbrio de um sistema mecânico é dito estável se forças acidentais, choques, vibrações, excentricidades, imperfeições, heterogeneidades, tensões residuais ou outros fatores não fazem com que o sistema saia excessiva ou desastrosamente de sua configuração inicial.

Caso aconteça o contrário, nós dizemos que a configuração é instável e se tem lugar a uma "perda de estabilidade". Ao perder a estabilidade, o sistema pode comportar-se de diversas formas. Geralmente, tem-se lugar a passagem para um novo estado de equilíbrio, o qual, na maioria dos casos, vem acompanhado de grandes deformações e de deformações plásticas. Muitas vezes, ao perder a estabilidade, a estrutura continua a se deformar até a ruptura completa.

Podem ocorrer, finalmente, casos em que o sistema perde a estabilidade, do ponto de vista cinemático, passando a oscilar com amplitudes crescentes. Do ponto de vista matemático, estabilidade é usualmente interpretada significando que em uma dada configuração de equilíbrio, distúrbios infinitesimais causarão somente deslocamentos infinitesimais. O simples fato de que uma montagem estrutural é estável no sentido refinado, não significa necessariamente que ela é segura do ponto de vista da engenharia.

Por exemplo, um navio pode ser estável no sentido de que pequenas ondas não o façam virar, contudo isto pode não ser estável o bastante para que ele possa fazer uma viagem através do oceano. Semelhantemente, uma estrutura constituída de uma casca esférica (DOMO) pode estar no estado de equilíbrio estável, contudo uma perturbação apropriada pode causar o "snap through" (configuração invertida) levando-a a uma forma deformada inconveniente ou indesejável. A primeira ilustração indica que a teoria infinitesimal da estabilidade (Teoria de Liapunov) deve ser usada com ressalvas. Com tudo isto,

não obstante, a teoria infinitesimal tem inumeráveis aplicações práticas.

De um modo geral, a palavra "estabilidade" é usada de uma maneira clássica, isto é, distúrbios infinitesimais de um sistema estável causam somente deslocamentos infinitesimais na configuração espacial:

O conceito de estabilidade do equilíbrio é consideravelmente intuitivo e surgiu logo no desenvolvimento da mecânica clássica. O aparecimento em 1744 do problema de Euler e as contribuições de Lagrange em 1788 deram início aos estudos neste campo. No século seguinte, precisamente em 1885, Poincaré havia esboçado a teoria geral da bifurcação, e a definição de estabilidade foi dada com rigor matemático no tratado de Liapunov em 1892. A teoria não linear da bifurcação para sistemas elásticos contínuos foi apresentada por Koiter^[1] em 1945. Um importante estudo linear de sistemas conservativos e não conservativos foi feito por Ziegler em 1956. Uma nova linha de estudo da teoria geral não linear da estabilidade elástica foi iniciada por Thompson em 1963 em termos de coordenadas generalizadas^[8].

A primeira contribuição significativa foi de Roorda^[40], que examinou os distintos pontos de bifurcação da estabilidade elástica em termos gerais. O interesse no estudo do comportamento da estrutura nos pontos de bifurcação e nas suas vizinhanças é muito grande e Chilver mostrou que na presença de cargas críticas quase coincidentes, os caminhos de

equilíbrio pós-críticos podem exibir violentas distorções^[41] (no caso, deslocamentos ou rotações), as quais desaparecem quando a coincidência completa é obtida. Em sistemas simétricos, Supple enfocou com cuidado a "quase coincidência" e mostrou que podem surgir bifurcações secundárias em um mesmo caminho pós-crítico primário^[42].

Um significativo progresso no desenvolvimento da teoria geral foi a demonstração de Thompson e Walker^[8] que o estudo da perturbação no ponto de bifurcação pode ser desenvolvido sem o recurso do esquema de diagonalização.

2.1.2 - ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

Seja um sistema mecânico conservativo, cuja configuração espacial é dada pelo conjunto das n coordenadas generalizadas Q_i . Assume-se como sendo única e ponto a correspondência entre o conjunto das coordenadas Q_i e a configuração espacial do sistema, onde as coordenadas e suas variações não estão sujeitas a restrições. Então, associando Q_i com um sistema de coordenadas retangulares num espaço Euclidiano n -dimensional, pode-se assegurar que qualquer ponto neste espaço de coordenadas Q_i corresponde a uma única configuração espacial admissível, e mais, qualquer trajetória neste espaço corresponde a um único movimento espacial admissível do sistema.

Sendo Λ o parâmetro de carga podemos dizer que este sistema possui uma única Função Energia Potencial Total $\Pi(Q_i, \Lambda)$ e uma única Função Energia Cinética $T(Q_i, \dot{Q}_j, \Lambda) = \frac{1}{2} T^{ij}(Q_k, \Lambda) \dot{Q}_i \dot{Q}_j$, ambas sendo contínuas bem comportadas. Estamos interessados na estabilidade do equilíbrio do sistema sob várias condições de carregamento, portanto Λ é um parâmetro importante e cuja influência deseja-se estudar. Para um valor de Λ prescrito, a resposta dinâmica do sistema é determinada pelas equações de Lagrange e/ou Hamilton. Estas funções de energia podem surgir diretamente de um sistema mecânico discreto, ou indiretamente de um sistema contínuo discretizado de alguma forma ou sujeito à decomposição modal.

Visto que não há restrições nas variações das coordenadas ou das velocidades, o sistema é dito holonômico. E ainda, como nas funções Π e T não aparece explicitamente o tempo, dizemos que este sistema é escleronômico.

Introduzindo-se o conceito de estabilidade de Liapunov relativo ao equilíbrio, vem:

"O estado de equilíbrio de um sistema mecânico discreto é dito estável se durante o movimento provocado por uma pequena perturbação inicial, as velocidades e os deslocamentos permanecem suficientemente pequenos em todo o tempo. Se ocorrer o contrário, tem-se a instabilidade. Se, por outro lado, o movimento provocado pela perturbação é tal que as velocidades e os deslocamentos se aproximam de zero quando o tempo tende para infinito, o estado de equilíbrio é dito assintoticamente estável".

Este conceito está relacionado com o espaço de fase $2n$ -dimensional.

Para o caso do equilíbrio estático de corpos elásticos, o conceito materializa-se nos dois axiomas abaixo:

Axioma 1:

"Um valor estacionário da energia potencial total com relação às coordenadas generalizadas é necessário e suficiente para o equilíbrio do sistema".

Este axioma é válido para um sistema mecânico conservativo.

Axioma 2 :

"Um mínimo completo relativo da energia potencial total com respeito às coordenadas generalizadas é necessário e suficiente para a estabilidade de um estado de equilíbrio do sistema".

Estes axiomas não podem ser aplicados, em geral, para um sistema dinâmico. Percebe-se que não se fez referência alguma sobre a Função Energia Cinética nestes dois a

xiomas. A energia cinética não influi no estado de equilíbrio estático, mas visto que a estabilidade, de um modo mais amplo, é um conceito dinâmico e relacionada aos movimentos do sistema, nós podemos dizer que os efeitos inerciais podem efetivamente conduzir a uma desestabilização do sistema, mas pode também conduzir a uma estabilização.

Usualmente, uma massa "m" sujeita a um campo gravitacional "g" é substituída por uma força $P=mg$. Isto é aceitável sob condições estáticas, mas sob condições dinâmi-cas este carregamento $P=mg$ não é adequado.

Os dois sistemas mecânicos mostrados na figura (2.1) têm idênticas funções energia potencial Π , mas, as funções energia cinética T diferem entre si por um fator aditivo $\frac{1}{2} m \dot{\epsilon}^2$, onde ϵ é o deslocamento vertical da massa do sistema. Em virtude destes dois axiomas apresentados, os dois sistemas terão a mesma resposta estática, embora suas respostas dinâmicas sejam diferentes.

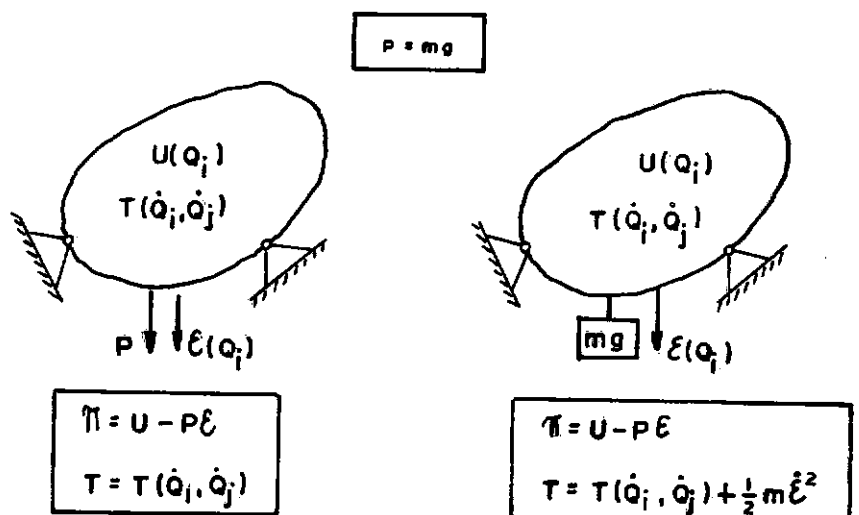


FIGURA (2.1)

DOIS SISTEMAS COM DIFERENTES RESPOSTAS DINÂMICAS MAS COM IDENTICAS RESPOSTAS ESTÁTICAS.

Definimos como posição de equilíbrio estável aquela em que o sistema ao ser desviado de sua posição inicial de uma grandeza arbitrariamente pequena volta à posição inicial, segundo o conceito de estabilidade de Liapunov. Em todos os casos se supõe que as perturbações da posição de equilíbrio são arbitrariamente pequenas. Note-se que pode acontecer que um sistema estável "para pequenas perturbações" não seja estável para grandes perturbações. A recíproca já não é verdadeira, ou seja, um sistema que é estável para grandes perturbações também o é para pequenas perturbações.

Em vista disto, vamos apresentar uma ilustração clássica que é a do rolete sobre diversas superfícies de curvaturas diferentes.



FIGURA (2.2)

Na figura 2.2(a) tem-se a representação do equilíbrio dito estável. Quando uma pequena perturbação tirando o sistema da sua posição inicial de equilíbrio resulta num acréscimo da energia potencial e, como consequência, há a tendência do sistema em voltar à sua posição inicial, assim como em 2.2(a) um mínimo de Π sempre define uma posição estável.

Na figura 2.2(b) tem-se a representação do equilíbrio dito instável. Dependendo da magnitude da perturba-

ção, para a primeira figura de (b) será instável para qualquer magnitude, para a segunda figura de (b) será instável para grandes magnitudes, resulta num decréscimo da energia potencial e como consêquência há a tendência do sistema em se afastar da posição inicial tornando-se "um mecanismo". Um máximo de Π sempre define uma posição instável.

Na figura 2.2(c) tem-se um valor estacionário de Π e que ocorre no ponto de inflexão. Neste caso o equilíbrio é classificado como sendo instável, visto que uma pequena perturbação para o lado direito resultará em uma tendência a se afastar sempre do ponto de inflexão. Fisicamente, esta condição de equilíbrio é muitas vezes estável para pequenos deslocamentos e seu comportamento se aproxima ao do quarto caso, figura 2.2(d), que representa o equilíbrio indiferente, insensível à perturbação de qualquer magnitude.

2.2 - CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE

Os métodos empregados para determinar se um sistema em uma dada configuração de equilíbrio é estável ou não, dependem dos critérios de estabilidade que serão apresentados agora. Basicamente existem três critérios de estabilidade:

- 1 - Critério Estático
- 2 - Critério da Energia
- 3 - Critério Dinâmico

2.2.1 - CRITÉRIO ESTÁTICO

O critério estático, também conhecido por critério de "Euler ou do Equilíbrio", parte da suposição de que devem coexistir distintas configurações de equilíbrio para uma mesma condição de carregamento no instante em que uma configuração deixa de ser estável, o que corresponderia a um equilíbrio neutro ou indiferente.

Um exemplo deste critério é o do cálculo da haste bi-articulada. A seção transversal é constante, homogênea, e tem um comportamento elástico, ou seja, obedece à lei de Hooke. É o chamado problema de Euler.

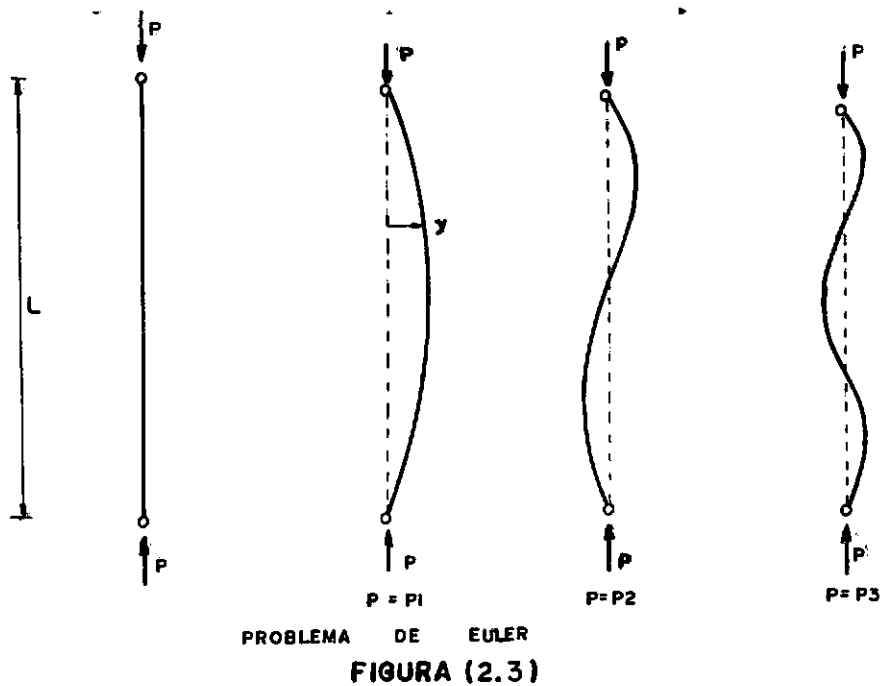
Na figura (2.3), assumindo que a primeira forma defletida seja uma possível posição de equilíbrio, ela deve satisfazer a equação diferencial linearizada

$$y'' + \frac{P}{EI} \cdot y = 0 \quad \text{e como condições de contorno:} \quad \begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(L)=0 \end{array}$$

e que tem como solução a expressão:

$$y_n = B \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad , \quad \text{com} \quad \sqrt{\frac{P_n}{EI}} = \frac{n\pi}{L}$$

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$



Para a haste carregada com $0 \leq P \leq P_1$, a forma reta da haste é a única forma possível de equilíbrio. Quando $P=P_1$ implica na forma instável e P_1 é então a primeira carga crítica da haste e o modo como ela se deforma é chamado primeiro modo de flambagem. Matematicamente, quando $P > P_1$, a única forma possível de equilíbrio será ainda a forma reta. Quando P atinge o valor de P_2 , a haste volta a flambar, só que agora com um valor de $P=P_2$ diferente de P_1 , e de um modo também diferente chamado de segundo modo de flambagem, e assim por diante. $P=P_3$ é a terceira carga crítica de instabilidade e que dá o terceiro modo de flambagem.

Percebe-se que $P_1 < P_2 < P_3 \dots$. A pergunta seria: Então, qual destas cargas seria a solução do problema proposto? A resposta lógica será: é aquela que nos conduz à primeira instabilidade da haste, ou seja, $P=P_1$. Fisicamente, só

nos interessa a primeira carga crítica, as outras não acontecem na prática.

2.2.2 - CRITÉRIO DA ENERGIA

2.2.2.1 - SISTEMA ESTRUTURAL

Consideremos um sistema estrutural conservativo, isto é, um sistema mecânico escleronômico e holonômico (Ver Apêndice II), o qual será designado como sendo um "sistema dinâmico simples" de Synge e Griffith^[8], descrito pela função "Energia Potencial Total" $\Pi(Q_i, \Lambda)$ onde Q_i representa o conjunto das n coordenadas generalizadas e Λ o parâmetro de carga. Deste modo pode-se representar o trabalho de um sistema discreto finito na mecânica clássica.

O equilíbrio e a estabilidade do sistema podem ser discutidos através do comportamento de $\Pi(Q_i, \Lambda)$, como será discutido no próximo ítem, onde o parâmetro de carga Λ pode ser tomado como sendo qualquer variável que aparece na função Energia, e cuja influência no sistema estrutural se deseja estudar. Assim sendo, Λ pode ser associado com a magnitude de forças prescritas que agem no sistema, mas ainda pode ser identificada como sendo massa, dimensão ou um módulo de elasticidade, ou ainda a grandeza de um deslocamento prescrito independente das coordenadas generalizadas. Em alguns problemas de interesse prático, a função Energia Potencial Total se-

rã uma função linear dos parâmetros de carga escolhidos, visto que a classe dos sistemas, onde surgem esta linearidade, apresenta algumas características distintas dos demais. Neste tratamento nós podemos, por razões puramente de notação, substituir Λ por P e então escrever $\Pi(Q_i, P) = U(Q_i) - P \cdot \epsilon(Q_i)$ onde P pode ser considerado como sendo a magnitude de uma força generalizada associada ao deslocamento generalizado $\epsilon(Q_i)$, e $U(Q_i)$ é a energia de deformação em função das coordenadas generalizadas Q_i .

Associando as variáveis básicas Q_i e Λ com os eixos de coordenadas retangular em um espaço Euclídeano de $(n+1)$ dimensões, nós vemos que as n equações de equilíbrio

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_i}(Q_i, \Lambda) = 0 \quad (2.1)$$

especificam um valor estacionário de Π com respeito às coordenadas generalizadas Q_i e definem uma série de caminhos de equilíbrio neste mesmo espaço.

2.2.2.2 - ESTABILIDADE DE UM ESTADO DE EQUILÍBRIO

Consideremos agora um estado de equilíbrio estável dado por:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i^E \\ \Lambda &= \Lambda^E \end{aligned} \quad (2.2)$$

e que satisfazem as n equações de equilíbrio dadas por (2.1)

e que por simplicidade iremos representar por:

$$\pi_i(Q_j^E, \Lambda^E) = 0 \quad (2.3)$$

onde o índice i denota a derivada parcial de π com relação à coordenada generalizada Q_i . Consideremos agora incrementos deste estado de equilíbrio e definidos por:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i^E + q_i \\ \pi &= \pi^E + v \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\pi^E = \pi(Q_i^E, \Lambda^E)$ é função das expressões (2.2) e é designado como sendo pertencente a um estado de equilíbrio estável. Aplicando-se ao incremento " v " à expansão (série) de Taylor com relação às coordenadas generalizadas, obtêm-se:

$$v = \delta\pi^E + \frac{1}{2} \pi_{ij}^E q_i q_j + \frac{1}{6} \pi_{ijk}^E q_i q_j q_k + \dots + \frac{1}{n!} \pi_{i\dots n}^E q_i \dots q_n \dots \quad (2.5)$$

onde $\delta\pi^E$ significa a primeira variação de π^E . Mas, do princípio dos trabalhos virtuais, tem-se:

$$\delta\pi^E = 0 \quad (2.6)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior a dois, obtêm-se a forma quadrática:

$$v = \frac{1}{2} \pi_{ij}^E q_i q_j \quad (2.7)$$

Então, de (2.4) e (2.7), obtêm-se:

$$\pi = \pi^E + \frac{1}{2} \pi_{ij}^E q_i q_j \quad (2.8)$$

Podemos dizer que quando o sistema passa de uma configuração de equilíbrio estável para uma configuração de

equilíbrio vizinha, o incremento da função energia potencial total Π é dado por (2.7), metade da segunda variação de Π^E . O primeiro passo para a análise é providenciarmos a diagonalização das formas quadráticas de (2.8) por meio de uma transformação não singular das coordenadas assim:

$$q_i = \alpha_{ij} u_j \quad , \text{ onde } |\alpha_{ij}| \neq 0$$

e que tem como inversa:

$$u_i = \beta_{ij} q_j \quad , \text{ onde } |\beta_{ij}| \neq 0 \quad .$$

Percebe-se que se nós plotarmos as coordenadas u_i no espaço q_i se obtém um outro conjunto de eixos coordenados não necessariamente retangulares. Neste novo sistema pode-se escrever:

$$v = \frac{1}{2} C_i u_i^2 \quad (2.9)$$

onde C_i são constantes. Em vista de (2.9) definimos uma nova função energia

$$D(u_i, \Lambda) \equiv \Pi(Q_i^E + \alpha_{ij} u_j, \Lambda) \quad (2.10)$$

Um novo estado de equilíbrio é dado por:

$$D = D^E + d \quad (2.11)$$

onde

$$D^E = D(0, \Lambda^E) \quad (2.12)$$

Analogamente, expandindo D em série de Taylor na sua vizinhança, obtém-se o incremento "d", dado por:

$$d = \frac{1}{2} D_{ii}^E \cdot u_i^2 + \frac{1}{6} D_{ijk}^E u_i u_j u_k + \dots \quad (2.13)$$

onde o subscrito em D representa a derivada parcial com relação ao deslocamento correspondente u_i , e o superscrito E representa a avaliação no estado de equilíbrio. De (2.9), (2.12) e (2.13) obtêm-se:

$$C_i = D_{ii}^E = D_{ii}(0, \Lambda^E) \quad (2.14)$$

e

$$|\alpha_{ij}|^2 \cdot |\pi_{ij}^E| = |D_{ij}^E| = C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n$$

A forma quadrática " v " pode ser diagonalizada de infinitas maneiras, e supõe-se que se escolha uma tal que as propriedades invariantes de v se manifestem como sendo propriedades invariantes de C_i . O número de C_i positivos, de C_i negativos e de C_i zeros são independentes da escolha da transformação diagonalizante.

As coordenadas u_i e os coeficientes C_i são importantes neste critério, e chamamos u_i de "eixos coordenados principais" e C_i de "coeficientes de estabilidade". Se um determinado coeficiente de estabilidade C_r é positivo, nós dizemos que o estado de equilíbrio é estável em relação à coordenada principal u_r correspondente. Se um outro coeficiente C_s é negativo, nós dizemos que o estado de equilíbrio é instável em relação à coordenada principal u_s correspondente. Se ainda um outro coeficiente C_t é zero, nós dizemos que o estado de equilíbrio é crítico em relação à coordenada principal u_t correspondente.

Dá-se o nome de "grau de instabilidade" ao número de coeficientes de estabilidade negativos. Uma outra maneira de determinar se o estado de equilíbrio é crítico em relação a uma ou mais coordenadas principais é ver se os dois determinantes $|\Pi_{ij}|$ e $|D_{ij}|$ são iguais a zero, e o que acontece no estado de equilíbrio crítico.

Pode-se mostrar^[8] que se o menor coeficiente de estabilidade é positivo, o estado de equilíbrio é estável em relação a todas as coordenadas principais e v é "positivo definido"; neste caso dizemos que o estado é "inteiramente estável".

Mostra-se também^[8] que se o menor coeficiente de estabilidade é negativo, o estado de equilíbrio é instável em relação a uma ou mais coordenadas principais e v "admite valores negativos"; neste caso dizemos que o estado é "inteiramente instável".

E finalmente^[8], se o menor coeficiente de estabilidade é zero, o estado de equilíbrio é crítico em relação a uma ou mais coordenadas principais e estável em relação ao resto das coordenadas. A forma quadrática v é "positiva semi-definida" e não decide sobre a estabilidade do equilíbrio.

Se o coeficiente de estabilidade C_1 for igual a zero, os termos de ordem superior da expansão (em série) de v devem ser examinados. Considerando o caso no qual $C_1=0$ e $C_s>0$ para todo $s \neq 1$. A forma quadrática v é positiva se

mi-definida, existe um valor zero numa "direção crítica" definida por

$$u_s = \beta_{sj} q_j \quad (\text{para todo } s \neq 1)$$

Usando-se primeiro as coordenadas básicas Q_i , fixando um valor para $\Lambda = \Lambda^c$ e examinando-se a variação de Π ao longo dos eixos coordenados, sob a forma paramétrica

$$\Lambda = \Lambda(s)$$

$$Q_i = Q_i(s)$$

onde s é um parâmetro conveniente e é nulo no estado de equilíbrio crítico. A variação de Π ao longo do eixo é dada pela expressão abaixo:

$$v(s) = \Pi[Q_i(s), \Lambda^c] - \Pi^c \quad (2.15)$$

Expandindo esta variação como função do parâmetro s e usando-se o desenvolvimento em série de Taylor:

$$v(s) = \dot{v}^c s + \frac{1}{2} \ddot{v}^c s^2 + \frac{1}{6} \ddot{\ddot{v}}^c s^3 + \dots \quad (2.16)$$

onde o ponto denota a diferenciação com relação a s .

Tomando (2.15) e diferenciando com relação a s , temos:

$$\dot{v} \equiv \frac{dv}{ds} = \Pi_i \dot{Q}_i \quad (2.17)$$

Tomando $s=0$ em (2.17) o equivalente ao estado de equilíbrio crítico c , obtém-se:

$$\dot{v}^c = 0 \quad (2.18)$$

visto que $\Pi_i^c = 0$.

Diferenciando (2.15) duas vezes, tem-se:

$$\ddot{v} = \pi_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \pi_i \ddot{q}_i \quad (2.19)$$

Avaliando (2.19) no estado de equilíbrio crítico, tem-se:

$$\ddot{v}^c = \pi_{ij}^c \dot{q}_i^c \dot{q}_j^c \quad (2.20)$$

A expressão (2.20) é uma função positiva semi-definida das n parcelas \dot{q}_i^c . Tomando-se a diferencial de (2.20) com relação a uma parcela \dot{q}_r^c :

$$\frac{\partial \ddot{v}^c}{\partial \dot{q}_r^c} = 2\pi_{rj}^c \dot{q}_j^c = 0 \quad (2.21)$$

isto é:

$$\pi_{ij}^c \dot{q}_j^c = 0 \quad (2.22)$$

A solução deste sistema dará os valores de \dot{q}_i^c correspondentes à direção para a qual v^c é mínimo. Como (2.20) é positiva semi definida, este mínimo é zero ($v^c \Big|_{\text{Min}} = 0$)

É necessário se fazer o estudo das variações de $v(s)$ em uma ordem superior porque nada se pode dizer a respeito da estabilidade.

A terceira variação de v em relação ao parâmetro s dá:

$$\ddot{v} = \pi_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_j \dot{q}_k + 3\pi_{ij} \ddot{q}_i \dot{q}_j + \pi_i \ddot{\ddot{q}}_i \quad (2.23)$$

No estado de equilíbrio crítico c tem-se:

$$\ddot{V}^c = \Pi_{ijk}^c \dot{Q}_i^c \dot{Q}_j^c \dot{Q}_k^c \quad (2.24)$$

Se (2.24) é diferente de zero, o estado de equilíbrio é seguramente instável. Se (2.24) é zero, não dá para decidir a respeito da estabilidade do estado de equilíbrio crítico, e neste caso é necessário considerar variações de $v(s)$ de ordem superior. Fazendo o mesmo procedimento anterior, nós apresentamos os eixos coordenados do estado de equilíbrio crítico c na forma paramétrica, mas só que escolhendo agora u_1 (coordenada principal crítica) como variável independente, então:

$$u_i = u_i(u_1)$$

e sabendo que $u_i(u_1) = u_i$, podemos escrever que

$$u_i^{(1)} = \frac{du_i}{du_1}, \quad u_i^{(2)} = \frac{d^2 u_i}{du_1^2}$$

tira-se que

$$u_1^{(1)} = \frac{du_1}{du_1} = 1$$

$$u_1^{(2)} = \frac{d^2 u_1}{du_1^2} = 0$$

Genericamente podemos escrever:

$$u_1^{(r)} = \delta_{1r}$$

onde δ representa o delta de Kronecker $\left\{ \begin{array}{l} r=1 \rightarrow \delta=1 \\ r \neq 1 \rightarrow \delta=0 \end{array} \right.$

O superscrito r representa a r -ésima di-

ferenciação com relação a u_1 .

A variação da energia potencial total ao longo deste caminho u_1 é dada pela expressão:

$$f(u_1) \equiv D[u_1(u_1), \Lambda^c] - D^c \quad (2.25)$$

Expandindo (2.25) em série de Taylor:

$$f(u_1) = f_1^c u_1 + \frac{1}{2} f_{11}^c u_1^2 + \frac{1}{6} f_{111}^c u_1^3 + \dots \quad (2.26)$$

onde:

$$f_1^c = \left. \frac{df}{du_1} \right|_c, \text{ e assim por diante.}$$

Os coeficientes desta série são obtidos através da diferenciação de (2.25) em relação a u_1 . Assim

$$f_1 = D_i u_i^{(1)} \quad (2.27)$$

e que no estado de equilíbrio crítico c vale

$$f_1^c = 0 \quad (2.27.a)$$

Diferenciando duas vezes (2.25) em relação a u_1 :

$$f_{11} = D_{ij} u_i^{(1)} u_j^{(1)} + D_i u_i^{(2)} \quad (2.28)$$

Sabendo que D_{ij}^c está diagonalizado com $D_{11}^c = 0$, vem:

$$f_{11}^c = D_{ss}^c (u_s^{(1)c})^2 \quad (2.29)$$

com o índice de somação $s=2, \dots, n$.

A expressão (2.29) é positiva semi-definida, e $u_s^{(1)c} = 0$ para todo $s \neq 1$.

Dando prosseguimento ao estudo das varia -
ções de $f(u_1)$ vamos diferenciar (2.25) três vezes em relação
a u_1 :

$$f_{111} = D_{ijk} u_i^{(1)} u_j^{(1)} u_k^{(1)} + 3D_{ij} u_i^{(2)} u_j^{(1)} + D_i u_i^{(3)} \quad (2.30)$$

e que no estado de equilíbrio crítico c vale

$$f_{111}^c = D_{111}^c \quad (2.31)$$

Se (2.31) é diferente de zero no estado de
equilíbrio crítico c , este estado de equilíbrio é seguramen-
te instável, enquanto que se der zero nada se pode afirmar e,
necessariamente, somos obrigados a analisar a quarta variação
de $f(u_1)$ com a condição que $D_{111}^c = 0$.

A quarta diferenciação de (2.25) nos forne-
ce:

$$\begin{aligned} f_{1111} = D_{ijkl} u_i^{(1)} u_j^{(1)} u_k^{(1)} u_l^{(1)} + 6D_{ijk} u_i^{(2)} u_j^{(1)} u_k^{(1)} + \\ + 4D_{ij} u_i^{(3)} u_j^{(1)} + 3D_{ij} u_i^{(2)} u_j^{(2)} + D_i u_i^{(4)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

A (2.32) no ponto crítico vale:

$$f_{1111}^c = D_{1111}^c + 6D_{s11}^c u_s^{(2)} + 3D_{ss}^c (u_s^{(2)})^2 \quad (2.33)$$

com o índice de somação $s=2, \dots, n$.

Fazendo umas transformações em (2.33), che-
ga-se a :

$$f_{1111}^c = D_{1111}^c - 3 \frac{(D_{s11}^c)^2}{D_{ss}^c} + 3D_{ss}^c \left[u_s^{(2)c} + \frac{D_{s11}^c}{D_{ss}^c} \right]^2 \quad (2.34)$$

f_{1111}^c é agora função das $n-1$ derivadas se gundas $u_s^{(2)c}$ para $(s \neq 1)$. Esta função toma o valor mínimo

$$f_{1111}^c = D_{1111}^c - 3 \sum_{s=2}^n \left(\frac{D_{s11}^c}{D_{ss}^c} \right) \equiv \tilde{D}_{1111}^c \quad (2.35)$$

quando

$$u_s^{(2)c} = - \frac{D_{s11}^c}{D_{ss}^c} \quad (\text{para } s \neq 1) \quad .$$

Se \tilde{D}_{1111}^c é positivo, o estado de equilíbrio crítico é estável, enquanto que se \tilde{D}_{1111}^c é negativo, o estado de equilíbrio é instável. Este critério leva em conta ainda a possibilidade que a energia potencial pode crescer ou decrescer quando se afasta do estado de equilíbrio crítico ao longo de todos os eixos coordenados. Este estudo foi feito nu ma direção e em torno de um ponto crítico. Pode-se fazer o estudo da estabilidade considerando-se um caminho de equilíbrio.

2.2.2.3 - CONSIDERAÇÕES SOBRE OS QUATRO PONTOS CRÍTICOS

Sem qualquer perda de generalidade, toma-se como origem do espaço $(n+1)$ dimensional como sendo o ponto em que se tem $Q_i = \Lambda = 0$. Visto que ambos estão relacionados com a forma de Energia Potencial Total, fica claro que há uma relação entre as configurações de equilíbrio e a estabilidade do sistema. Agora serão introduzidos quatro modos diferentes de instabilidade e cada qual com seus pontos críticos. Convencionalmente tem-se que as linhas fortes representam os caminhos de equilíbrio estável, sendo que as partes descontínuas denotam os caminhos instáveis.

O ponto que separa o caminho estável do caminho instável é o chamado "ponto crítico". E, para um mesmo nível do parâmetro de carga Λ , as linhas contínuas finas representam a variação da função energia potencial total para este nível considerado.

2.2.2.3.1 - PONTO LIMITE

A figura (2.4) mostra a configuração típica de estruturas como arcos abatidos e domos.

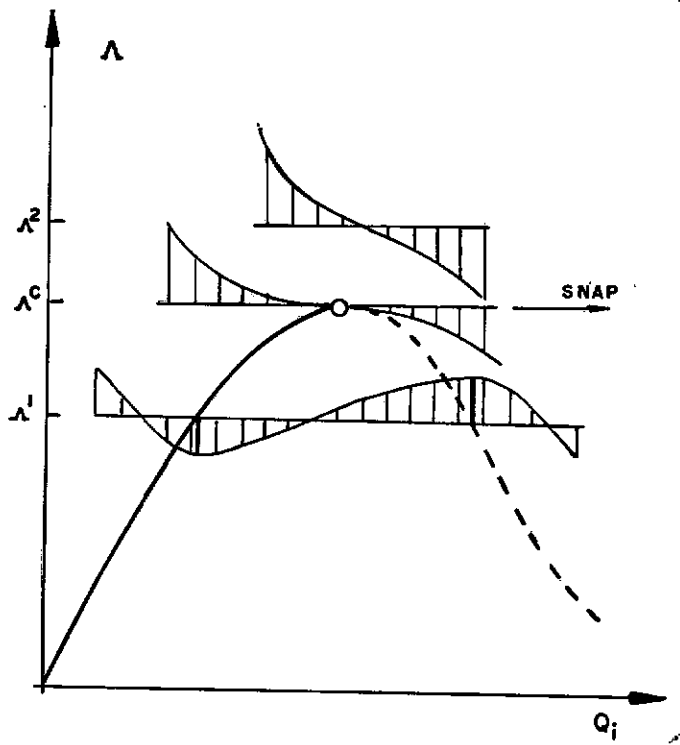


FIGURA (2.4)

Vê-se o caminho primário estável de equilíbrio até o ponto limite também chamado "snap through". Inicialmente este caminho é estável desde a origem e vai perdendo a estabilidade à medida que aumenta o parâmetro de carga Λ até o limite $\Lambda = \Lambda^C$ onde se tem o ponto limite ou ponto crítico. Para o nível $\Lambda = \Lambda^1$ menor que Λ^C a energia potencial total $\Pi(Q_i, \Lambda^1)$ tem um mínimo com relação a Q_i na região ascendente do caminho estável e um máximo na região descendente do caminho instável.

Fazendo-se Λ crescer até o nível $\Lambda = \Lambda^C$, a variação de $\Pi(Q_i, \Lambda)$ tem um ponto de inflexão neste ponto. Significa dizer que $\Pi(Q_i, \Lambda)$ muda de sinal no estado de equilíbrio crítico.

Para um valor $\Lambda = \Lambda^2$ superior a Λ^c não há um estado de equilíbrio local e a função energia potencial total $\Pi(Q_i, \Lambda)$ não tem um ponto estacionário local. Neste caso o estado crítico de equilíbrio é visto como sendo por si só instável, e a ausência de um estado de equilíbrio local para valores de Λ maiores que Λ^c implica que o sistema nas proximidades de Λ^c , acontecerá o "snap" se Λ sofrer pequenos acréscimos, passando a estrutura a ter uma configuração invertida.

Nesta mudança dinâmica há uma dissipação de energia; o sistema caminha para um estado de equilíbrio na direção indicada pela seta da figura (2.4). Daí para frente, com $\Lambda = \Lambda^2 > \Lambda^c$, o sistema terá um caminho estável crescente até a instabilidade material.

2.2.2.3.2 - PONTO DE BIFURCAÇÃO ASSIMÉTRICO

As formas estruturais que nós estudamos têm sido tais que todo estado de equilíbrio tem somente um caminho passando por ele. A flambagem é causada por uma instabilidade em um determinado estado do caminho de equilíbrio, resultando como foi dito anteriormente, no movimento da estrutura para outro estado de equilíbrio, e o movimento entre estes dois estados pode, ocasionalmente, ser súbito. É possível, porém, em certos tipos de estruturas, existirem dois caminhos de equilíbrio que passem por um mesmo estado de equilíbrio (estado crítico).

O caminho de equilíbrio que passa pela origem é chamado "caminho primário" ou "caminho fundamental" e é interceptado por outro caminho de equilíbrio chamado "caminho secundário" ou "caminho pós-crítico". O ponto de interseção entre estes dois caminhos é chamado de "ponto de bifurcação".

Na figura(2.5) os dois caminhos têm uma declividade diferente de zero no ponto crítico. Para $\Lambda' < \Lambda^C$, a energia potencial total $\Pi(Q_i, \Lambda')$ tem um mínimo com relação a Q_i na região ascendente do caminho estável e um máximo com relação a Q_i na região descendente instável do caminho secundário. Para Λ crescendo até o nível $\Lambda = \Lambda^C$, a variação de $\Pi(Q_i, \Lambda)$ terá que ter obrigatoriamente um ponto de inflexão no estado de equilíbrio crítico. Para $\Lambda = \Lambda^2$, o máximo e o mínimo reaparecem como mostra a figura (2.5). Assim o estado de equilíbrio crítico é de novo instável, e a presença de distúrbios infinitesimais neste ponto pode transformar a estrutura em um mecanismo. Esta, por sua vez, irá procurar uma configuração estável, apesar da existência de estados de equilíbrio estáveis para valores maiores de Λ ao longo do caminho secundário.

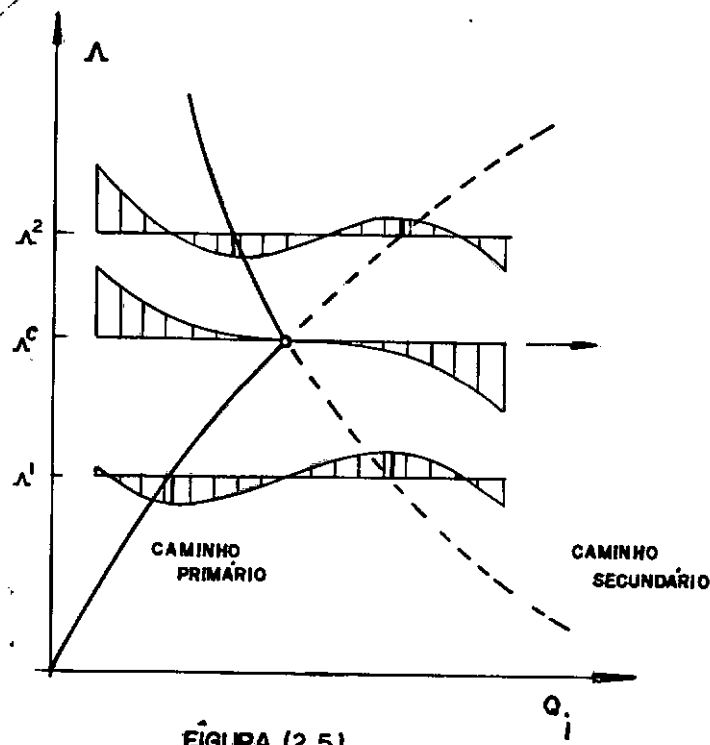


FIGURA (2.5)

2.2.2.3.3 - PONTO DE BIFURCAÇÃO SIMÉTRICO-ESTÁVEL

Na figura (2.6) pode-se ver a terceira configuração de interesse que é o chamado ponto de bifurcação simétrico estável.

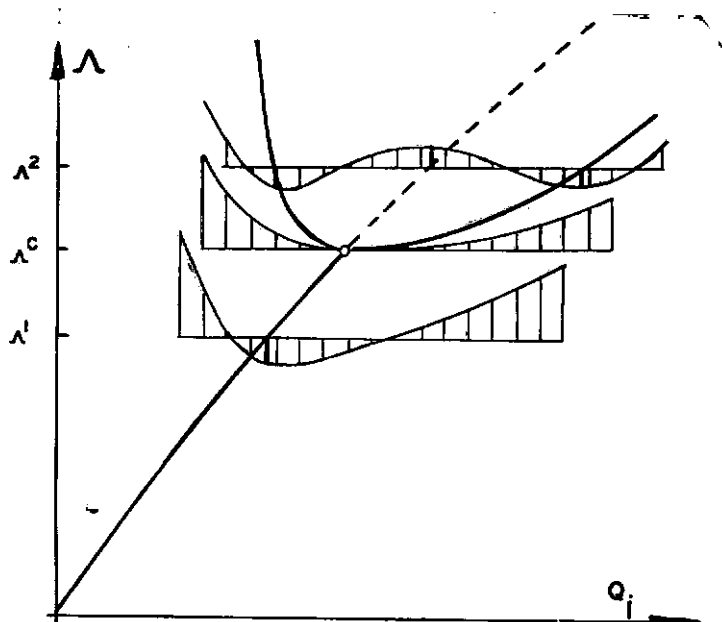


FIGURA (2.6)

Neste caso o caminho fundamental parte da origem monotonicamente e perde sua estabilidade inicial na interseção com o caminho pós-crítico e que passa neste ponto suavemente com uma declividade zero; em outras palavras, a tangente ao caminho pós-crítico no ponto crítico admite uma inclinação nula. A energia potencial total $\Pi(Q_i, \Lambda')$, para $\Lambda' < \Lambda^c$ terá um único valor estacionário com respeito a Q_i , a saber: o mínimo na região estável do caminho fundamental. À medida que o valor de Λ é acrescido, este mínimo é transformado em dois mínimos e um máximo para valores de $\Lambda = \Lambda^2 > \Lambda^c$. Neste caso o ponto crítico é estável. Com acréscimos pequenos em Λ o sistema não sofrerá o "snap" mas seguirá o caminho pós-crítico estável e que sobe; a direção tomada dependerá dos pequenos distúrbios assumidos pelo sistema.

2.2.2.3.4 - PONTO DE BIFURCAÇÃO SIMÉTRICO INSTÁVEL

A quarta e última configuração que será examinada é o "ponto de bifurcação simétrico instável" e que está mostrado esquematicamente na figura (2.7).

Neste caso, o caminho fundamental intercepta um caminho pós-crítico instável e descendente e como no caso anterior, tem uma declividade nula no ponto de equilíbrio crítico. Para um valor prescrito $\Lambda = \Lambda'$ menor que o valor crítico, a energia potencial total $\Pi(Q_i, \Lambda')$ terá agora três valores estacionários com relação a Q_i , a saber: dois valores

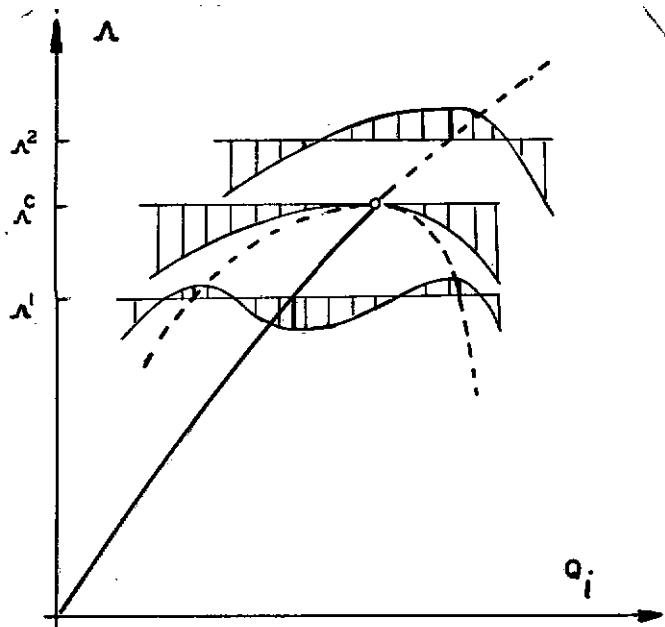
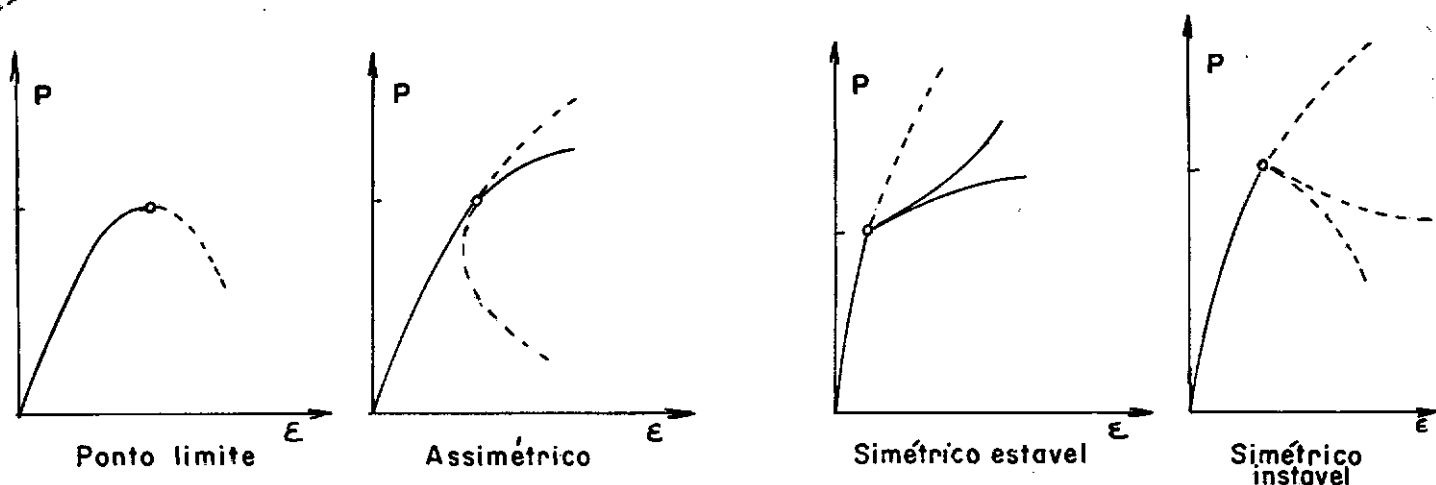


FIGURA (2.7)

máximos na região instável do caminho pós-crítico, um em cada ramo, e um mínimo na região estável do caminho fundamental. Estes três pontos estacionários se transformam em um único ponto máximo para valores de $\Lambda = \Lambda^2 > \Lambda^c$, como mostra a figura (2.7).

Ao contrário do terceiro caso, o ponto crítico é instável, portanto sujeito a um "snap". A direção a ser tomada dependerá do tipo de perturbação imposta ao sistema. Plotando os valores de Λ versus Q_i e observando-se de uma posição estratégica, o caminho pós-crítico aparecerá como sendo uma cuspide interceptando o caminho fundamental de equilíbrio. A figura (2.8) nos dá uma idéia das configurações dos caminhos de equilíbrio no plano $P \times \epsilon(Q_i)$.



FIGURA(2.8)

Genericamente, os termos "simétrico estável" e "simétrico instável" são aplicados quando o caminho pós-crítico tem uma declividade zero no ponto crítico, ou seja, a primeira derivada é nula, mas para que isto aconteça é preciso que a derivada segunda deste caminho seja positiva de um lado e negativa do outro e vice-versa. Com relação à derivada terceira, será em geral diferente de zero no ponto crítico.

Nas três configurações críticas em que o sistema pode sofrer um "snap", isto é, o ponto limite, ponto de bifurcação assimétrico e o ponto de bifurcação simétrico instável, foi visto que para valores de Λ próximos de Λ^C o sistema se apresenta inicialmente num estado de metaestabilidade (estabilidade limite), podendo tornar-se um mecanismo.

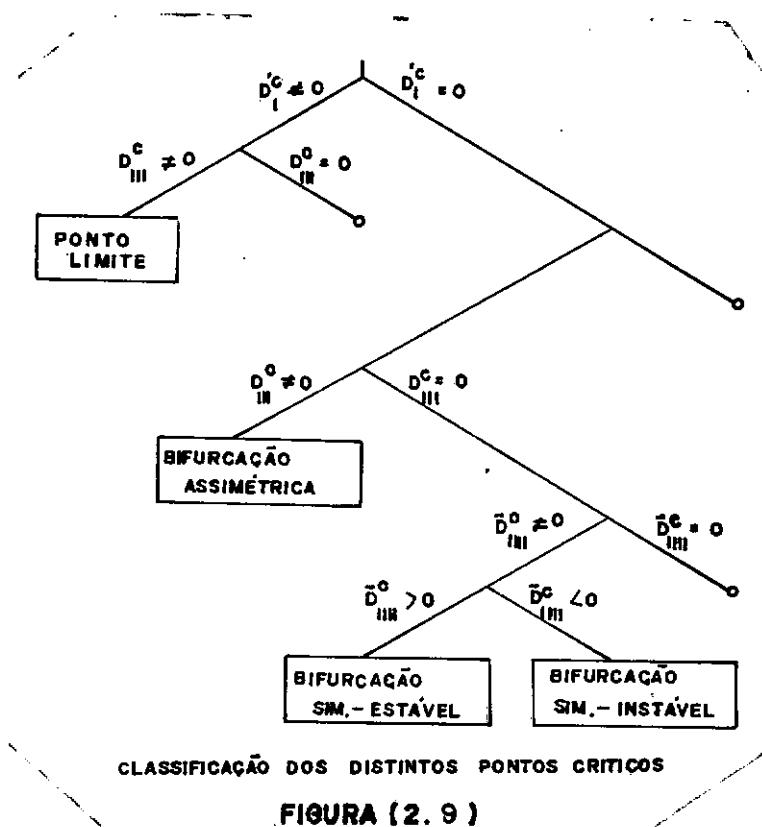
A ocorrência nos diversos tipos de estruturas dos quatro pontos críticos será citada a seguir. Estruturas como arcos e domos, abatidos ou não e carregados transversalmente, têm como resposta à solicitação configurações do tipo apresentado na figura (2.4). O ponto de bifurcação assimé-

trico (figura (2.5)) é muito raro em comparação com os pontos simétricos de bifurcação, e a sua configuração é característica de estruturas que apresentam simetria rotacional, como por exemplo cascas esféricas submetidas a pressões externas e também cascas esféricas achatadas nos polos, sujeitas igualmente a pressões externas.

O fenômeno que se apresenta como o mais comum dentre todos os aqui apresentados é o da figura (2.6); o ponto de bifurcação simétrico estável, e sua configuração é característica de colunas submetidos a esforços centrados, instabilidade lateral de vigas, pórticos simétricos, placas submetidas a esforços transversais, flambagem por flexo torção e outros.

O quarto e último caso, o da figura (2.7), ponto de bifurcação simétrico instável, tem sua configuração como característica de estruturas como cascas cilíndricas submetidas a esforços axiais, sujeitos a torção e pressão externa. Cascas cônicas podem apresentar comportamentos que dizem respeito tanto à bifurcação simétrica estável como à bifurcação simétrica instável. Já os domos esféricos abatidos sujeitos a uma carga lateral exibe distintas bifurcações simétricas de um caminho fundamental não linear. Se sujeita a uma carga concentrada apresentará um ponto de bifurcação estável; se a carga for uniformemente distribuída, apresentará um ponto de bifurcação instável.

fluxograma para se detectar qual o tipo de ponto crítico que se está estudando por meio dos chamados coeficientes de estabilidade apresentados em (2.14). O procedimento é simples: toma-se a equação do comportamento normal (*), que no comportamento crítico dá D_1^c . Então, para investigar a natureza do ponto limite, nós primeiro especificamos que D_1^c é diferente de zero e daí parte-se para examinar as vizinhanças do estado de equilíbrio crítico c para o qual $D_{11}^c = 0$, enquanto $D_{ss}^c \neq 0$ quando $s \neq 1$. Se D_1^c é zero, as possibilidades são outras, assegurando que este sistema não apresenta um ponto crítico limite.



(*) $D_{ii} \ddot{u}_i + D_i^c \dot{\Lambda} \Big|_E = 0$, onde o traço vertical denota a derivada em relação ao parâmetro de carga Λ .

Para os outros pontos críticos, deve-se ter $D_1^c = 0$.

2.2.3 - OS DOIS TEOREMAS FUNDAMENTAIS

A existência de todos estes pontos críticos que foram examinados está ligada a dois teoremas básicos que foram desenvolvidos primeiramente por Thompson^[8] em 1970, e foram baseados somente nos estudos do equilíbrio.

O primeiro teorema diz respeito aos pontos de bifurcação e pode ser assim enunciado:

Teorema 1:

"Um caminho de equilíbrio inicialmente estável (caminho primário) variando monotonicamente com o parâmetro de carga não pode se tornar instável sem a interseção de um outro caminho distinto de equilíbrio (caminho secundário)".

Os três pontos de bifurcação já citados estão claramente em conformidade com este teorema.

O segundo teorema engloba ambos os pontos limite e de bifurcação e é enunciado assim:

Teorema 2 :

"Um caminho de equilíbrio inicialmente estável aumentando com o parâmetro de carga, não pode se aproximar de um estado de equilíbrio instável no qual o sistema sofrerá um "snap dinâmico" sem a aproximação de um caminho de equilíbrio (o qual pode ou não ser uma extensão do caminho original) para valores do parâmetro de carga menor que aquele devido ao estado instável".

As demonstrações deste dois teoremas podem ser obtidas na referência [8], página 61.

2.2.4 - CRITÉRIO DINÂMICO DE ESTABILIDADE

O movimento de um grande número de sistemas dinâmicos é descrito por um conjunto de equações diferenciais nas quais o tempo não aparece de uma forma explícita, mas implicitamente através das variáveis $Q_i(t)$. Tais sistemas são chamados AUTÔNOMOS. Caso contrário eles são chamados HETERÔNOMOS.

O desenvolvimento a ser feito a seguir é para sistemas com um número "n" de graus de liberdade fazendo-se a hipótese de que ele possa ser estendido para o limite $n \rightarrow \infty$, o que permite a sua aplicação a sistemas contínuos.

Será também suposto que o sistema é linear ou passível de uma linearização. Um sistema de equações lineares e homogêneas que descrevem o movimento de um sistema dinâmico é dado pela seguinte expressão:

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^m M_{ij}(t) Q_j \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (2.36)$$

onde:

Q_i representa as coordenadas generalizadas, $m=2n$, sendo n o número de graus de liberdade do sistema.

$M_{ij}(t)$ são funções contínuas em t sobre um intervalo a-

berto $t_1 < t < t_2$, e que será representado por I .

Dado um conjunto de condições iniciais

$$Q_i(t_0) = \alpha_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (2.37)$$

pode-se concluir que (2.36) tem como única solução

$$Q_i(t) = \phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, t) \quad , \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.38)$$

Escrevendo (2.36) na forma compacta, tem-se:

$$\{\dot{Q}\} = [M(t)]\{Q\} \quad (2.39)$$

sendo:

$\{Q\}$ uma matriz coluna ($m \times 1$) e cujos componentes Q_i pertencem a um espaço Euclidiano m -dimensional.

$[M(t)]$ matriz quadrada de ($m \times m$) contínua em t e geralmente não simétrica.

A expressão (2.39) fica completamente determinada se $[M(t)]$ é conhecida.

Um caso particular e de grande interesse é aquele em que o sistema dinâmico é autônomo como acontece no presente trabalho. Neste caso a matriz $[M]$ é de coeficientes constantes. Neste caso a solução de (2.39) pode ser obtida na forma explícita em t . Isto é possível se introduzirmos uma matriz $[B(t)]$ definida por

$$[B(t)] = \int_0^t [M(s)] ds \quad (2.40)$$

$s \rightarrow$ é variável de integração.

Quando se comuta (troca) $[M(t)]$ e $[B(t)]$ é possível obter uma forma explícita para a matriz fundamental^[27].

A exponencial da matriz $[B]$ é dada por

$$e^{[B]} = [I] + [B] + \frac{1}{2!}[B]^2 + \frac{1}{3!}[B]^3 + \dots + \frac{1}{k!}[B]^k \quad (2.41)$$

$[I] \rightarrow$ matriz identidade

As matrizes $[M]$ e $[B]$ são comutativas se $[M]$ é constante ou se $[M(t)]$ é diagonal, e em qualquer destes casos $e^{[B]}$ representa a matriz fundamental.

Pode-se provar^[27] que nas vizinhanças de $t=t_0$, a solução de (2.39) é:

$$\{Q(t)\} = e^{[B]} \{Q_0\}, \quad k \rightarrow \infty \quad (2.42)$$

sendo $\{Q_0\}$ as condições iniciais do problema.

Para um sistema autônomo $[M]$ está relacionada a um sistema homogêneo linear segundo a expressão seguinte:

$$\{\dot{Q}\} = [M]\{Q\} \quad (2.43)$$

com $\{Q\}$ um vetor de $(m \times 1)$, $[M]$ uma matriz de $(m \times m)$ geralmente não simétrica e cujos coeficientes são reais e constantes. As soluções de (2.43) são definidas para qualquer valor de tempo t . Pode-se mostrar que estas soluções podem possuir derivadas de qualquer ordem. Por exemplo, é fácil verificar que $\{\dot{Q}\}$ é também uma solução de (2.43). Com efeito pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt} \{\dot{Q}\} = \frac{d}{dt} ([M]\{Q\}) = [M]\{\dot{Q}\}$$

$$\{\ddot{Q}\} = [M]\{\dot{Q}\} \quad (2.44)$$

Analogamente, as derivadas de qualquer ordem ou combinações destas derivadas são também soluções. Já foi dito anteriormente que quando $[M]$ é uma matriz de coeficientes constantes, $e^{[B]}$ é a matriz fundamental. Em vista das equações (2.40) e (2.42), pode-se escrever:

$$[\phi(t)] = e^{[B]} = e^{(t-t_0)[M]} \quad (2.45)$$

onde $[\phi(t)]$ - matriz de $(m \times m)$ cujas colunas são formadas pelas soluções linearmente independentes de (2.39). É chamada de "matriz fundamental".

Assim, a solução de (2.43) é válida para qualquer instante de tempo t e pode ser escrita na forma

$$Q(t) = e^{(t-t_0)[M]} \{Q_0\} \quad (2.46)$$

onde $\{Q_0\}$ é uma matriz coluna e representa as condições iniciais para todo $t=t_0$. Segue-se que o comportamento do sistema dinâmico é assim completamente determinado pelo comportamento da matriz $e^{(t-t_0)[M]}$, a qual por outro lado está governada pelos autovalores de $[M]$.

O próximo segmento é a análise de como $[M]$ controla o comportamento do sistema (2.43).

O determinante assim chamado "característi

co" é dado por:

$$\det([M] - \lambda[I]) = |[M] - \lambda[I]| \quad (2.47)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. No cálculo do determinante característico (2.47) obtém-se o chamado "polinômio característico" associado à matriz $[M]$. Então ao expandirmos (2.47) obtemos:

$$\det([M] - \lambda[I]) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad (2.48)$$

As raízes do polinômio característico, denotadas por λ_j ($j=1,2,\dots,m$) são chamadas de "autovalores" de $[M]$. Para cada autovalor λ_j obtém-se um autovetor $\{u^{(j)}\}$ e que satisfaz a equação

$$[M]\{u^{(j)}\} = \lambda_j \{u^{(j)}\} \quad (2.49)$$

Em (2.48) m é inteiro e a_m é o determinante de $[M]$. Se $a_m=0$ uma das raízes características é zero e daí segue-se que para $[M]$ não ser uma matriz singular, ($\det[M] \neq 0$), todos os autovalores devem ser diferentes de zero.

Agora considerando o caso em que há raízes repetidas, digamos λ_i , a equação (2.48) assume a forma:

$$\det([M] - \lambda[I]) = (\lambda_i - \lambda)^{m_i} P_i(\lambda) \quad (2.50)$$

onde $(\lambda_i - \lambda)^{m_i}$ é chamado de "divisor elementar" do polinômio característico e $P_i(\lambda)$ é um polinômio em λ , com $P_i(\lambda_i) \neq 0$. O inteiro m_i é conhecido como "multiplicidade" de λ_i , e o número de autovetores linearmente independentes associados com λ_i é chamado de "nulidade" de λ_i e é denotado por n_i , em geral $n_i \leq m_i$.

Dizemos que duas matrizes $[M]$ e $[N]$ são ditas semelhantes se elas têm o mesmo polinômio característico. Neste caso os coeficientes a_k ($k=1,2,\dots,m$) são invariantes sobre certas transformações semelhantes.

TEOREMA: Toda matriz $[M]$ de $(m \times m)$ é semelhante a uma matriz da forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} [J_0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [J_1] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [J_s] \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

onde $[J_0]$ é uma matriz diagonal $(q \times q)$ e formada com os q primeiros autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$, e

$$[J_i] = \begin{bmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{q+i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{q+i} \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots,s \quad (2.52)$$

λ_j ($j=1,2,\dots,q+s$) são os autovalores de $[M]$ não necessariamente distintos.

A matriz (2.51) é chamada de forma canônica de Jordan e as matrizes (2.52) são chamadas de "matrizes companheiras".

Se o divisor elementar do polinômio característico associado com a matriz $[M]$ é simples, a forma ca-

nônica de Jordan correspondente é diagonal. Para investigar o comportamento da solução (2.45) introduziremos a seguinte transformação linear:

$$\{Q\} = [R]\{u\} \quad (2.53)$$

onde $[R]$ é uma matriz de $(m \times m)$ não singular e de coeficientes constantes. Introduzindo (2.53) em (2.43) e pré-multiplicando o resultado por $[R]^{-1}$, obtêm-se:

$$\{\dot{u}\} = [R]^{-1}[M][R]\{u\} \quad (2.54)$$

chamando

$$[J] = [R]^{-1}[M][R]$$

$$\det([J] - [I]) = \det([R]^{-1}([M] - [I])[R]) = \det[R]^{-1} \det([M] - [I]) \det[R]$$

Portanto:

$$\det([J] - [I]) = \det([M] - [I]) \quad (2.55)$$

De (2.55) concluímos que $[J]$ e $[M]$ são semelhantes e:

$$\{\dot{u}\} = [J]\{u\} \quad (2.56)$$

Por analogia com (2.43) e (2.45) posso escrever:

$$[\Psi(t)] = e^{(t-t_0)[J]} \quad (2.57)$$

Como $e^{t_0[J]}$ é uma matriz constante, segue-se que a investigação da solução de (2.43) se reduz à investigação da matriz:

$$e^{t[J]} = \begin{bmatrix} e^{t[J_0]} & [0] & \dots & [0] \\ [0] & e^{t[J_1]} & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & e^{t[J_s]} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Das expressões (2.54) e (2.56) já sabemos qual é a relação entre $[M]$ e $[J]$, portanto tem-se:

$$e^{(t-t_0)[M]} = e^{(t-t_0)[R][J][R]^{-1}} = [R] e^{(t-t_0)[J]} [R]^{-1} \quad \dots (2.59)$$

Introduzindo (2.59) em (2.45) obtemos:

$$[\phi] = e^{(t-t_0)[M]} = [R] e^{(t-t_0)[J]} [R]^{-1} = [R] [\psi] [R]^{-1} \quad \dots (2.60)$$

Assim, o comportamento da matriz fundamental $[\phi]$ correspondente ao sistema (2.43) é conhecida se conhecermos o comportamento de outra matriz fundamental $[\psi]$ do sistema (2.56). De uma maneira geral não há interesse particular na montagem da matriz fundamental $[\phi(t)]$ do sistema (2.43).

Por outro lado, $[\psi(t)]$ está relacionado com os autovalores λ_j da matriz $[M]$, e através destes autovalores poderemos decidir sobre a estabilidade do sistema. Então:

1 - Quando todos os autovalores de $[M]$ têm a parte real negativa, o sistema é "assintoticamente estável".

2 - Quando todos os autovalores de $[M]$ têm a parte real não positiva, (se um dos autovalores tiver a parte real igual a zero, o sistema possui um "comportamento crítico"). Neste caso, se os divisores elementares correspondentes a autovalores com a parte real nula, "são todos simples", então o sistema é "estável" mas "não assintoticamente estável".

Isto é verdade porque se todos os divisores elementares são simples, a matriz $[J_i]$ se reduz a uma forma diagonal.

3 - Se o menor dos autovalores de $[M]$ tem a parte real positiva, o sistema é "instável".

Um problema geral de autovalores pode ser apresentado da seguinte forma:

$$[S]\{u\} = \lambda [T]\{u\} \quad (2.61)$$

onde as matrizes quadradas $[S]$ e $[T]$ podem não ser simétricas; este é o caso mais geral.

Em sistemas conservativos, usando-se as equações de Lagrange pode-se obter as equações do movimento de um sistema linear na forma:

$$[A]\{\ddot{Q}\} - [B]\{\dot{Q}\} + [C]\{Q\} = \{0\} \quad (2.62)$$

onde $[A]$ é chamada de matriz do movimento ou matriz de massa, é simétrica e positiva definida; $[B]$ é chamada de matriz de rigidez, é simétrica e positiva definida; e $[C]$ é chamada de ma

triz de carga e sua característica depende do carregamento.

A apresentação genérica das matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ está no Capítulo V. Adotando como solução de (2.62) a expressão:

$$Q(z, t) = Q(z) \cdot f(t) \quad (2.63)$$

A separação de variáveis em (2.63) é muito útil para a resolução deste tipo de problema. Mais adiante será feita a sugestão para $f(t)$ bem como a discussão de (2.63) no que diz respeito à estabilidade do sistema. Substituindo (2.63) em (2.62) obtém-se:

$$[A]\{Q(z)\}\ddot{f}(t) - [B]\{Q(z)\}f(t) + [C]\{Q(z)\}f(t) = \{0\} \quad (2.64)$$

Agrupando as duas últimas parcelas de (2.64), vem:

$$[A]\{Q(z)\}\ddot{f}(t) + ([C] - [B])\{Q(z)\}f(t) = \{0\}$$

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^m (B_{ij} - C_{ij}) Q_j(z)}{\sum_{j=1}^m A_{ij} Q_j(z)} = \lambda \quad (2.65)$$

$i=1, 2, \dots, n$

Seguindo o procedimento normal usado na separação de variáveis, percebe-se que o lado direito de (2.65) ficou independente do tempo e ambos os lados devem ser iguais a uma constante λ positiva, fazendo $\lambda = \omega^2$ obtém-se as duas expressões; sendo $[0] = [B] - [C]$:

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (2.66)$$

$$[0]\{Q(z)\} = \omega^2 [A]\{Q(z)\} \quad (2.67)$$

Olhando para a expressão (2.67) percebe-se que recaímos num problema de autovalor do tipo apresentado em (2.61). A questão da estabilidade ficará resolvida se conhecermos seus autovalores que são as frequências de vibração da estrutura para um estado de carregamento representado pela matriz $[C]$, e tendo em vista o conceito de estabilidade de Lia punov. No caso do sistema não estar sujeito ao carregamento externo, a matriz de carga é nula, $[0] = [B]$ e as frequências obtidas são as frequências naturais do sistema.

Então, pelo critério dinâmico de estabilidade tem-se:

1 - Se todas as frequências de vibração do sistema em relação a um estado de equilíbrio são reais, então o estado de equilíbrio é ESTÁVEL.

2 - Se uma das frequências de vibração do sistema for imaginária, então o estado de equilíbrio é INSTÁVEL.

3 - E, se uma das frequências de vibração do sistema é zero, então o estado de equilíbrio do sistema é CRÍTICO. A frequência $\omega=0$ é a fronteira entre os estados de equilíbrio estável e instável. Para $\omega=0$, $T(\text{período}) = \infty$, ou seja, o sistema no seu estado oscilatório demorará um tempo infinito para passar por uma mesma posição. Em outras palavras, o sistema passa por esta posição e nunca mais volta devido à instabilidade que ele acaba de adquirir. A avaliação da estabilidade no estado crítico requer um estudo de vibrações não lineares.

res, isto é devido ao fato de que há grandes distúrbios dinâmicos na posição crítica.

A solução (2.63) pode ser escrita em sua forma mais geral assim:

$$Q(z,t) = Q(z_0) e^{(a+bi)t+\phi} \quad (2.68)$$

onde $Q(z,t)$ é a forma genérica para as soluções $u(z,t)$; $v(z,t)$; $\theta(z,t)$ do problema.

$Q(z_0)$ - amplitude inicial

ϕ - ângulo fase, e que por conveniência será tomado igual a zero.

Desenvolvendo-se (2.68), obtêm-se:

$$Q(z,t) = [Q(z_0)e^{at}]e^{bit} = A e^{bit} \quad (2.69)$$

com A = amplitude das vibrações em cada instante de tempo. Percebe-se que a estabilidade dependerá dos valores que a e b assumirem e portanto (2.69) é uma solução função de dois "campos" de estabilidade. Assim:

Analisando o campo e^{at} , tem-se que:

- 1 - $a < 0$, A decresce e o sistema será estável, ou melhor, assintoticamente estável pois para $t \rightarrow \infty$ implica em $A \rightarrow Q(z_0)$.
- 2 - $a > 0$, A cresce e o sistema será instável.
- 3 - $a = 0$, A constante, equilíbrio neutro.

Para este campo as trajetórias estão a -

presentadas na figura (2.10), e a magnitude de a é que irá determinar a velocidade com que o sistema irá percorrer a trajetória.

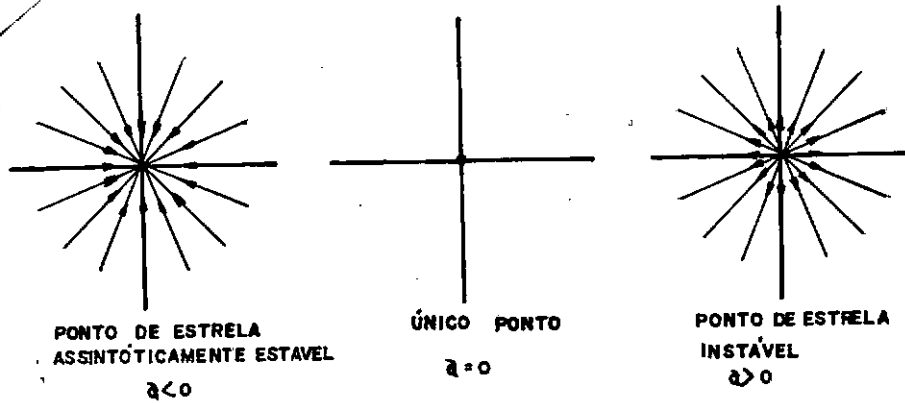


FIGURA (2.10)

A constante a poderá ser imaginada como sendo uma constante de amortecimento se ela for menor do que zero; caso contrário será uma constante de excitação.

Analisando-se o campo e^{bit} , é sempre estável mas não assintoticamente estável, e o sinal de b e sua magnitude determinará o sentido, a velocidade e o raio das trajetórias respectivamente e que serão círculos concêntricos na origem, como mostra a figura (2.11)

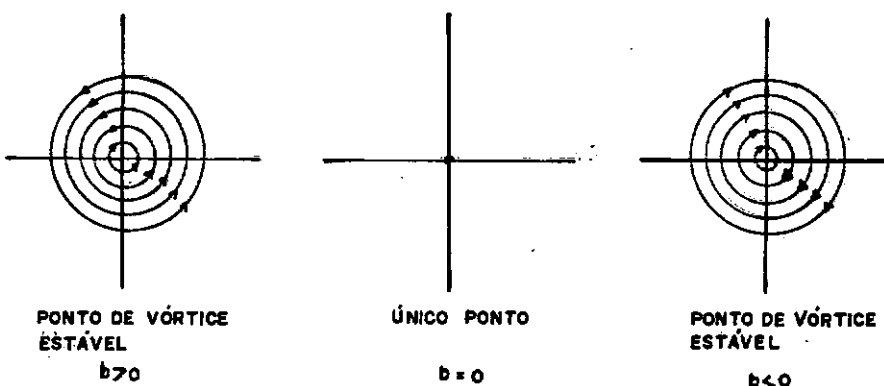
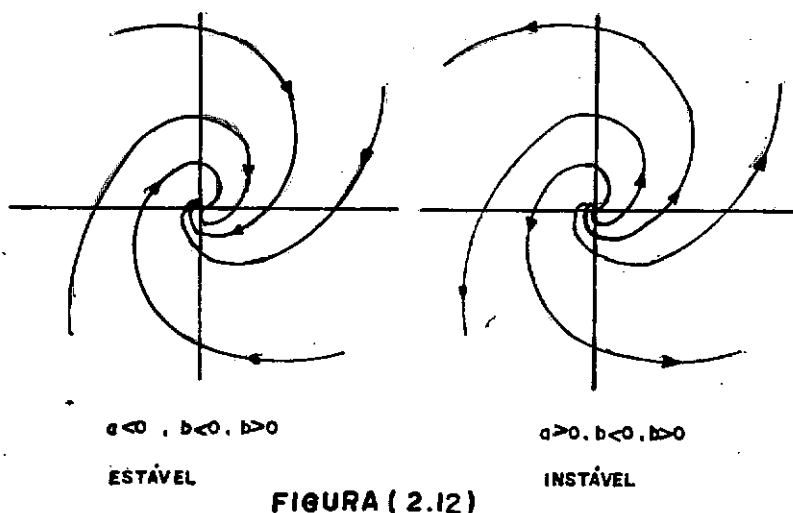


FIGURA (2.11)

Agora superpondo-se o efeito dos dois campos pode-se estudar a "interferência" que a e b provocam na solução (2.69). A superposição sempre dará como trajetória "espirais" saindo ou se aproximando da origem como mostra a figura (2.12).



Cabe aqui ainda ressaltar que as raízes λ_i de (2.48) de uma forma geral ocorrerão em pares de números complexos conjugados do tipo:

$$\lambda_i = \text{RE}\lambda_i \pm \text{IM}\lambda_i \quad (2.70)$$

O comportamento dinâmico do sistema (2.57) pode ser julgado pela análise de (2.70). Subentendendo-se que $\text{RE} = a$ e $\text{IM} = b$, da expressão (2.69). Então, se:

- 1 - $a=0$, as raízes são imaginárias e o sistema é vibratório não amortecido.
- 2 - $b=0$, as raízes são reais. Dois casos ainda podem acontecer:

- 2.1 - $a < 0$ - o movimento é aperiódico amortecido.
- 2.2 - $a > 0$ - o movimento é aperiódico amplificado.
- 3 - $b \neq 0$, $a \neq 0$ - as raízes são complexas e o tipo do movimento será decidido pelo sinal de a .
 - 3.1 - $a < 0$ - o movimento é vibratório amortecido.
 - 3.2 - $a > 0$ - o movimento é vibratório amplificado. Este caso é chamado de "instabilidade oscilatória " ou "flutter".

Se ainda $a=b=0$, as raízes serão nulas, dizemos que houve flambagem ou instabilidade de Euler.

CAPÍTULO IIIDEDUÇÃO DAS ENERGIAS3.1 - POTENCIAL ELÁSTICO

A introdução do conceito de Potencial Elástico ser ve para facilitar a compreensão da dedução das energias e está ele baseado em um estudo das deformações de um corpo sólido, homogêneo e contínuo referido a um sistema de eixos coordenados or togonais. Supondo que um ponto A no interior do corpo tenha como coordenadas x, y, z , independentes entre si. Em virtude da defor mação sofrida pelo corpo este ponto passará a ser definido pelas novas coordenadas.

$$\begin{aligned} x + u_x \\ y + u_y \\ z + u_z \end{aligned} \tag{3.1}$$

A deformação nas vizinhanças deste ponto A está completamente descrita pelas seis componentes $(\Delta x, \Delta u_x); (\Delta y, \Delta u_y)$ $(\Delta z, \Delta u_z)$ da deformação que são dados por:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{n=x,y,z} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \quad \begin{matrix} i=x,y,z \\ j=x,y,z \end{matrix} \tag{3.2}$$

Existem no ponto A um conjunto de direções ortogo nais entre si para o qual, das seis componentes associadas da defor mação as quantidades γ_{nh} , para $n \neq h$, desaparecem. Estas direções são chamadas de "direções principais" e as correspondentes compo

nentes de deformação $\Gamma_{nk} = 0$, para $n \neq k$ e $\Gamma_{nn} = \Gamma_n$ são chamadas de "elongações unitárias" nestas direções, ou também chamadas de "elongações principais" E_n e são definidas por

$$E_n = \sqrt{1 + \Gamma_n} - 1 \quad (3.3)$$

onde os Γ_n são as três raízes reais da equação do terceiro grau obtida fazendo-se o determinante do tensor das tensões igual a zero:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{xx} - \Gamma & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} - \Gamma & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} - \Gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Visto que a magnitude da elongação principal será independente da escolha da direção das coordenadas, pode-se concluir que os invariantes que se seguem existem e valem:

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz} = \Gamma_x + \Gamma_y + \Gamma_z \\ I_2 &= \gamma_{xx}\gamma_{yy} + \gamma_{yy}\gamma_{zz} + \gamma_{zz}\gamma_{xx} - (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \\ &= \Gamma_x\Gamma_y + \Gamma_y\Gamma_z + \Gamma_z\Gamma_x \\ I_3 &= \gamma_{xx}\gamma_{yy}\gamma_{zz} + 2\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - (\gamma_{xx}\gamma_{yz}^2 + \gamma_{yy}\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zz}\gamma_{xy}^2) = \\ &= \Gamma_x\Gamma_y\Gamma_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

A equação do terceiro grau será:

$$\Gamma^3 - I_1\Gamma^2 + I_2\Gamma - I_3 = 0 \quad (3.5a)$$

Fazendo-se a correspondência para tensões nor-

mais e de cisalhamento, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_x &\rightarrow \sigma_x \\
 \Gamma_y &\rightarrow \sigma_y \\
 \Gamma_z &\rightarrow \sigma_z \\
 \gamma_{xy} &\rightarrow \tau_{xy} \\
 \gamma_{xz} &\rightarrow \tau_{xz} \\
 \gamma_{yz} &\rightarrow \tau_{yz}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

As leis da elasticidade em geral dão as relações entre as tensões e deformações envolvidas no problema. Porém, pode-se também formular as leis pela introdução do "Potencial Elástico".

Admite-se que cada volume elementar do corpo possue uma energia potencial dependente do estado de deformação. Visto que o estado de deformação fica completamente descrito pelas componentes da deformação dados em (3.2), pode-se escrever a energia potencial elástica por unidade de volume como sendo

$$H = H(\gamma_{ij}) \tag{3.7}$$

Desprezam-se aqui os fenômenos termo-elásticos.

Foi estabelecido experimentalmente^[1] que o comportamento elástico linear para a maior parte dos materiais estruturais está perfeitamente descrito por uma lei da forma da equação (3.7). No caso da deformação infinitesimal, H é uma função quadrática, homogênea e definida positiva^[1]. Visto que as componentes da deformação no domínio elástico são muito peque -

nas para a maioria dos materiais (ordem de grandeza 0.001), assume-se que o Potencial Elástico é uma função definida positiva homogênea, quadrática das componentes da deformação. Em vista disso (3.7) é uma função de quarto grau em relação as derivadas da deformação.

O estado deformado pode ser descrito não somente pelas componentes da deformação γ_{ij} mas também pela grandeza e direção das elongações principais.

Para um material isotrópico, o potencial elástico será independente das direções das elongações principais e, então, completamente determinado pelos invariantes (3.5).

Podemos escrever:

$$H = H(I_1, I_2, I_3) \quad (3.8)$$

Uma função conveniente homogênea quadrática dos componentes da deformação que possua a forma da equação (3.8) é:

$$H = \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2 \quad (3.9)$$

Onde α_1 e α_2 , para um material homogêneo, são coeficientes constantes. Se o material é heterogêneo, então α_1 e α_2 são geralmente funções das coordenadas x, y, z . Com (3.5a) podemos reescrever (3.9), assim:

$$H = \alpha_1 \left[\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} (\gamma_x \gamma_y + \gamma_y \gamma_z + \gamma_z \gamma_x) \right] \quad (3.10)$$

Esta expressão será definida positiva se e somente se:

$$\alpha_1 > 0 \quad ; \quad -1 < \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} < 2$$

donde segue que

$$\alpha_1 > 0 \quad , \quad 0 > \alpha_2 > -3\alpha_1 \quad (3.11)$$

Para deformações infinitesimais, a equação (3.9) deverá ser estudada na "Teoria da elasticidade linear do potencial elástico".

Na dedução das energias será considerado que a seção transversal do perfil tenha ao menos um eixo de simetria e que será adotado como sendo o eixo vertical (y).

Tomando um elemento infinitesimal dz situado a uma distância z da origem do sistema de coordenadas situado em uma das extremidades da haste como mostra a figura (3.1).

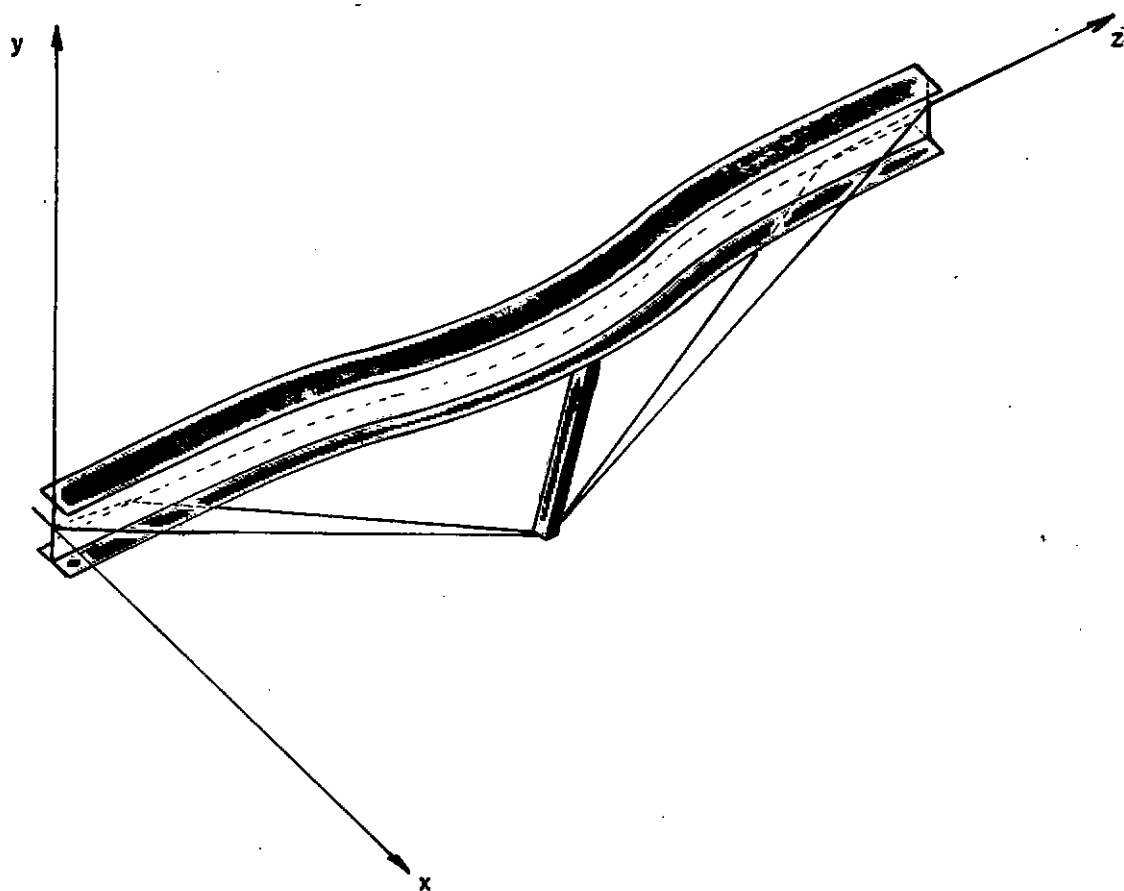


FIGURA (3.1)

Designando por $u=u(z,t)$ o deslocamento da haste na direção x , $v=v(z,t)$ o deslocamento na direção y , $w=w(z,t)$ o encur-

tamento da haste na direção do eixo 0-z, $\theta = \theta(z, t)$ a rotação da seção transversal da haste em torno do eixo 0-z.

Convencionalmente será adotada a regra da mão direita para designar o sentido positivo dos eixos. Para o sistema de coordenadas locais adotaremos os eixos y, x, z como mostra a figura (3.2).

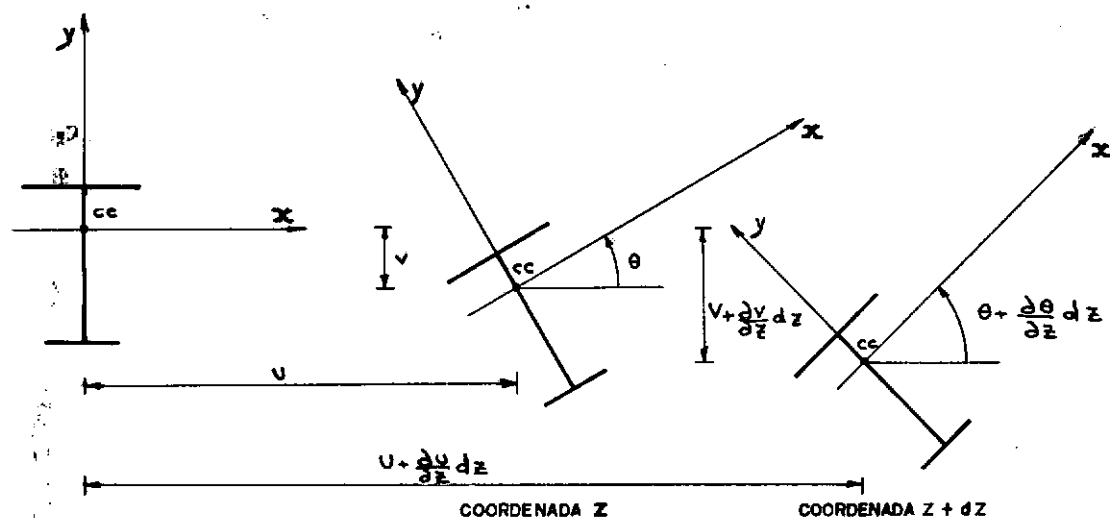


FIGURA (3.2)

A haste sofrerá deformações, cujas configurações serão genéricas pois não se sabe a priori como serão as formas das mesmas.

Foi necessário se fazer certas hipóteses:

- 1) A seção transversal da haste é constante.
- 2) As tensões nas fibras mais solicitadas devido ao esforços atuantes não excedem o limite de proporcionalidade no instante da flambagem (estabilidade material).
- 3) A deformação da haste, quando ela flete e torce, é tal que sua seção transversal não muda de formato.
- 4) O montante será considerado perfeitamente rígido a flexão

e incompressível.

- 5) Será desprezado o alongamento do cabo.
- 6) A ação externa P permanece paralela a sua direção original quando a seu ponto de aplicação se desloca.
- 7) Pequenas rotações.

3.2. - ENERGIA CINÉTICA (T)

A origem das coordenadas x e y foi tomada como sendo no centro de cisalhamento (CC). A seção transversal ro dará em torno deste centro como mostra a figura (3.3).

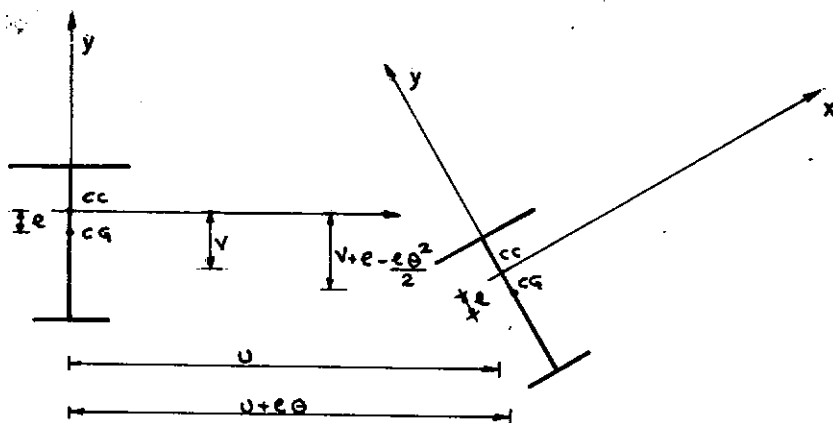


FIGURA (3.3)

com:

A = área da seção transversal

ρA = m/L massa por unidade de comprimento

θ = ângulo de rotação

I_p = momento polar de inércia da seção em relação ao centro de gravidade (CG)

e = distância entre o centro de gravidade (CG) e de cisalhamento (CC)

I_o = momento polar de inércia da seção em relação ao centro de cisalhamento.

tem-se:

$$I_p = I_x + I_y$$

Do teorema de Steiner, ou teorema dos eixos paralelos, vem:

$$I_o = I_x + I_y + Ae^2 = I_p + Ae^2$$

A energia cinética é dada por:

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t} (\dot{u} + e\dot{\theta}) \right]^2 dz + \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t} (v + e - \frac{e\dot{\theta}^2}{2}) \right]^2 dz + \\ & + \frac{\rho I_p}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (3.12)$$

desenvolvendo (3.12) , vem:

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz + \frac{\rho A e^2}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dz + \rho A e \int_0^L \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dz + \\ & + \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dz - \rho A e \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \theta dz + \frac{\rho A}{2} e^2 \int_0^L \theta^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dz + \\ & + \frac{\rho I_p}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (3.13)$$

Agrupando os termos e fazendo $K^2 = \frac{I_0}{A}$ (quadrado do raio de giração), ao se dividir e multiplicar (3.13) por A , obtem-se:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz + \frac{\rho A K^2}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dz + \rho A e \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dz + \\
 & + \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dz - \rho A e \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \theta dz + \frac{\rho A e^2}{2} \int_0^L \theta^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dz
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Que é a expressão da energia cinética.

3.3. ENERGIA POTENCIAL TOTAL DO SISTEMA (Π)

Na dedução da "Energia Potencial Total" do sistema foram feitas algumas considerações.

A primeira é que supõe-se que a estrutura tenha um nível inicial de energia U_0 produzido por uma tensão inicial σ_0 , no cabo. A finalidade desta tensão inicial σ_0 é que com ela pode-se representar melhor fisicamente o comportamento da estrutura e facilita a utilização de uma teoria linearizada. Se, por hipótese, adotássemos uma tensão inicial σ_0 nula, para que o cabo, e posteriormente a haste comesçassem a serem solicitados, a haste sofreria grandes deformações o que nos levaria a uma não linearidade geométrica e consequentemente o nível de utilização da estrutura ficaria reduzido visto que ela já estaria numa posição muito deformada. Outra consideração a ser feita é que a tensão σ_0 seja praticamente constante no decorrer do estudo mas

para cada tensão σ existe uma carga crítica de instabilidade.

3.3.1 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO SISTEMA (V)

3.3.1.1. - ENERGIA INTERNA INICIAL (U_0)

Este nível inicial de energia U_0 , na estrutura, não influirá no estudo, pois sendo uma parcela constante sua variação é nula. Desta forma nos defrontamos com um problema puramente estático consistindo apenas em determinar as reações provocadas pelo cabo e pelo montante na haste provenientes da tensão inicial σ_0 . Estas reações serão consideradas esforços externos e que realizarão o trabalho das forças externas ao sistema. Da figura (3.4) tiramos:

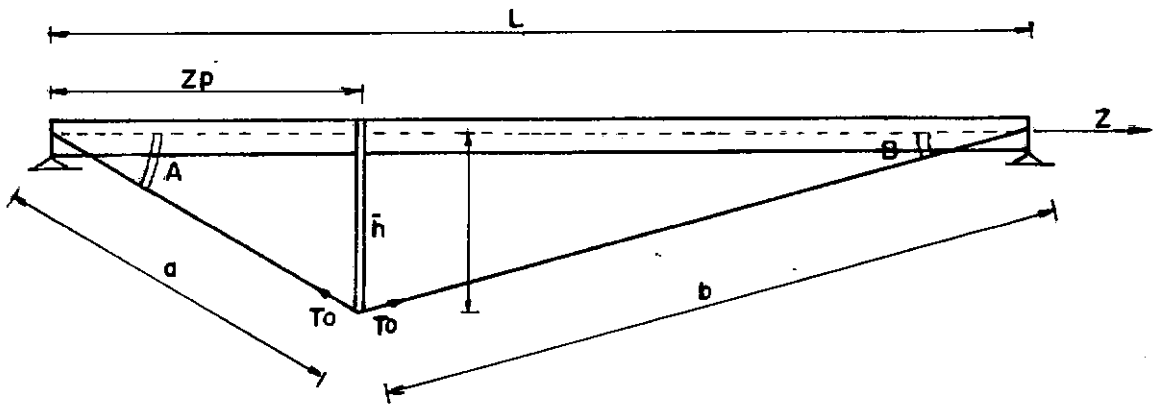


FIGURA (3.4)

$$a = \sqrt{Z_p^2 + \bar{h}^2}$$

$$\cos A + \cos B = Z_p \frac{(b-a) + aL}{ab}$$

$$b = \sqrt{(L - Z_p)^2 + \bar{h}^2}$$

$$\sin A + \sin B = \frac{(b+a)\bar{h}}{ab}$$

sendo:

\bar{h} = distância entre a extremidade do montante e o centro de cisalhamento.

T_o = esforço no cabo.

A, B = ângulos formados pelas direções do cabo com o eixo Z

a, b = comprimentos parciais do cabo.

A reação de T_o na haste será dada por

$$N = T_o (\cos A + \cos B) \quad (3.15)$$

substituindo, vem:

$$N = T_o \left[\frac{Z_p (b-a) + aL}{ab} \right] \quad (3.16)$$

A reação do montante na haste será dada por:

$$T = T_o (\sin A + \sin B) \quad (3.17)$$

substituindo, vem:

$$T = T_o \left[\frac{(b+a)\bar{h}}{ab} \right] \quad (3.18)$$

3.3.1.2 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DA HASTE (V_o)

Na obtenção da energia de deformação da haste em função dos esforços solicitantes iremos apresentar as parcelas separadamente:

1) A energia de deformação de flexão em função dos esforços

solicitantes M_x e M_y é dada por:

$$V_M = \int_0^L \frac{M_x^2}{2EI_x} dz + \int_0^L \frac{M_y^2}{2EI_y} dz \quad (3.19)$$

sendo:

EI_y = rigidez à flexão no plano x-0-z

EI_x = rigidez à flexão no plano y-0-z

Da resistência dos materiais, tem-se as relações

$$M_x = EI_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad \text{e} \quad M_y = EI_y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

e que substituindo-se na integral, chega-se a:

$$V_M = \int_0^L \frac{EI_x}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz + \int_0^L \frac{EI_y}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (3.20)$$

Observação: Não será considerada a energia de deformação devido ao cisalhamento por ser desprezível.

2) A energia de deformação devido a torção em função do esforço solicitante M_t é dada por:

$$V_{Mt} = \int_0^L \frac{M_t^2}{2GJt} dz \quad (3.21)$$

onde:

Jt = momento de inércia a torção, também chamado de constante de torção $CT^{1/2}$.

$J_t = \frac{1}{3} \int_L t^3 dA$, onde a integral se estende a todo o desenvolvimento L dos elementos da seção ou ainda quando se tratar de peças compostas, tem-se:

$J_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n m_i t_i^3$, com m = comprimento da linha média da seção considerada e t = espessura do elemento. Portanto J_t é uma característica da forma e dimensão da seção considerada.

Designando θ' o ângulo causado por M_t na unidade de comprimento da haste, obtém-se as relações:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_t}{GJ_t} \quad (3.22)$$

substituindo-se (3.22) em (3.21), obtém-se:

$$V_{M_t} = \int_0^L \frac{GC_T}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3.23)$$

onde:

$$C_T = J_t$$

GC_T = rigidez à torção.

3) O empenamento é caracterizado pelo fato de que a seção transversal da haste ao se deformar não permanece mais plana. Os deslocamentos do ponto no plano podem ser dados pelas expressões [37]:

$$v = -x\theta \quad (3.24)$$

$$u = +y\theta$$

Os deslocamentos correspondentes aos eixos são:

$$u \rightarrow x$$

$$v \rightarrow y$$

$$w \rightarrow z$$

Designando $\bar{w}(x,y)$ a função que caracteriza a forma do empenamento e por θ' o ângulo causado por M_t na unidade de comprimento da haste, M_t atua no plano $x-0-y$. Mas com (3.22) posso escrever:

$$w = \theta' \bar{w} \quad (3.25)$$

Tomando-se um elemento infinitesimal dz da haste, o ângulo de torção $d\theta$ será dado por:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} \quad (3.26)$$

Se houver impedimento parcial, este manterá a mesma forma $\bar{w}(x,y)$ mas sua intensidade será reduzida como se fosse provocada por um momento de torção uniforme $M_{tu} < M_t$, como consequência θ' será menor que o anterior e valerá

$$\theta' = \frac{M_{tu}}{GJ_t}$$

Portanto (3.25) permanecerá válida, notando-se porém que θ' varia só com z e \bar{w} varia com x e y . Um elemento dz de uma fibra sofrerá uma alteração de seu comprimento, evidentemente igual a dw , isto implica que haverá um alongamento e que será expresso por:

$$\epsilon = \frac{dw}{dz} \quad (3.27)$$

Sabendo que θ' só depende de z e representando

$$\theta'' = \frac{d\theta'}{dz} \quad (3.28)$$

posso escrever:

$$\epsilon = \theta'' \bar{w} \quad (3.29)$$

O cálculo da tensão normal é dado pela expressão conhecida da resistência dos materiais $\sigma = E\epsilon$. Pode-se calcular a tensão normal na seção transversal da haste, e vale:

$$\sigma = E \theta'' \bar{w} \quad (3.30)$$

A tensão σ varia dentro da seção com a função $\bar{w}(x,y)$, (dimensão: L^2).

A grandeza \bar{w} toma o nome de "área setorial". Quando não existe na seção outros esforços solicitantes (M,N) que deem lugar a tensões normais, as tensões dadas em (3.30) devem estar em equilíbrio, isto é, devem ser tais que:

$$\int_A \sigma dA = \int_A E \theta'' \bar{w} dA = 0$$

$$\int_A y \sigma dA = \int_A y E \theta'' \bar{w} dA = 0 \quad (3.31)$$

$$\int_A x \sigma dA = \int_A x E \theta'' \bar{w} dA = 0$$

Como $E \theta''$ é constante dentro da seção, implica:

$$\int_A \bar{w} dA = 0$$

$$\int y \bar{w} dA = 0 \quad (3.32)$$

$$\int x \bar{w} dA = 0$$

Estas três últimas igualdades constituem propriedades características da função \bar{w} correspondente ao caso em que não existem M , N e que toma, então o nome de "área setorial principal"^[2].

Define-se como sendo "momento de inércia setorial" a grandeza que tem a dimensão L^6 , e é dada por:

$$J_w = \int_A \bar{w}^2 dA = \int_A \bar{w}^2 dx dy \quad (3.33)$$

A energia de deformação por unidade de volume é assim expressa:

$$V_E = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{zz} \epsilon_{zz} dv \quad (3.34)$$

Sabe-se que:

$$\sigma_{zz} = E \theta'' \bar{w}$$

$$\epsilon_{zz} = \theta'' \bar{w}$$

Substituindo-se em (3.34), obtém-se:

$$V_E = \frac{1}{2} \int_V E (\theta'')^2 (\bar{w})^2 dv = \frac{1}{2} \int_V E (\theta'')^2 (\bar{w})^2 dx dy dz \quad (3.35)$$

Como \bar{w} é função só de x e y , vem:

$$V_E = \frac{1}{2} \int_0^L E (\theta'')^2 dz \int_A \bar{w}^2 dx dy = \frac{1}{2} E J_w \int_0^L (\theta'')^2 dz \quad (3.36)$$

onde:

J_w = momento de inércia setorial, também conhecida por constante de empenamento C_w ^{|2|} então:

$$V_E = \int_0^L \frac{E C_w}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (3.36.a)$$

Portanto a energia de deformação da haste (V_o) é dada pela soma de (3.20), (3.23) e (3.36.a), assim:

$$V_o = \int_0^L \frac{E I_x}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 dz + \int_0^L \frac{E I_y}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz + \int_0^L \frac{G C_T}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^L \frac{E C_w}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 dz \quad (3.37)$$

3.3.1.3. TRABALHO DAS MOLAS (V_1)

Como já foi dito anteriormente, existem dois casos em estudo. O primeiro, CASO I, trata da suposição feita de que o vínculo entre a haste e o montante seja um engastamento, e em relação a extremidade da haste, considerar-se-ã a possibilidade de aparecer alguma restrição à torção. Desta forma introduz-se uma mola de torção de rigidez K_1 . Se $K_1 = 0$, a extremidade da haste será livre para rotações. Se $K_1 \rightarrow \infty$, o vínculo tenderã a ser um engastamento perfeito em relação a torção. A posi

ção de K_1 é mostrada na Figura (3.5).

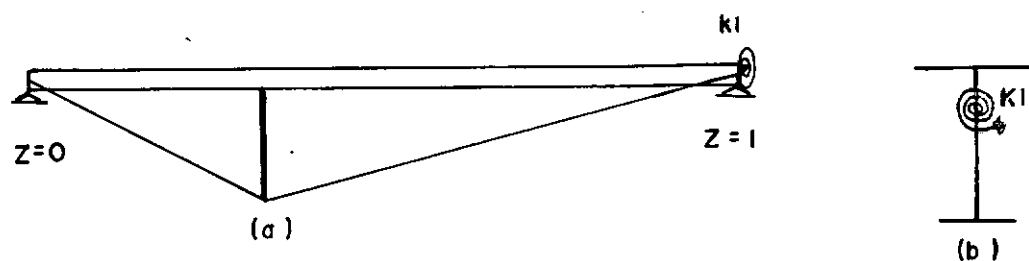


FIGURA (3.5)

O trabalho efetuado por esta mola de torção é dado por

$$V_1 = \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2 \Big|_{z=L} \quad (3.38)$$

O segundo caso, Caso II, trata da suposição feita de que o vínculo entre a haste e o montante seja uma articulação elástica de rigidez K_2 , em relação à torção, como mostra a Figura (3.6). Se $K_2 = 0$, trata-se de uma articulação simples. Se $K_2 \rightarrow \infty$ o vínculo tende para um engastamento perfeito entre a haste e o montante. Com relação a extremidade da haste o problema se torna igual ao apresentado no primeiro caso, e analogamente o trabalho de K_1 será dado por (3.38).

Na Figura (3.6), da geometria tiramos que:

$$\delta_1 = a(1 - \cos \theta) = a\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!}\right) \approx a \frac{\theta^2}{2}$$

$$a+b+h-v^* = v + \delta_1 + (a+b) \cos \theta + h \cos \phi \quad \therefore$$

$$v^* = \frac{b\theta^2}{2} + \frac{h\phi^2}{2} - v \quad (3.39)$$

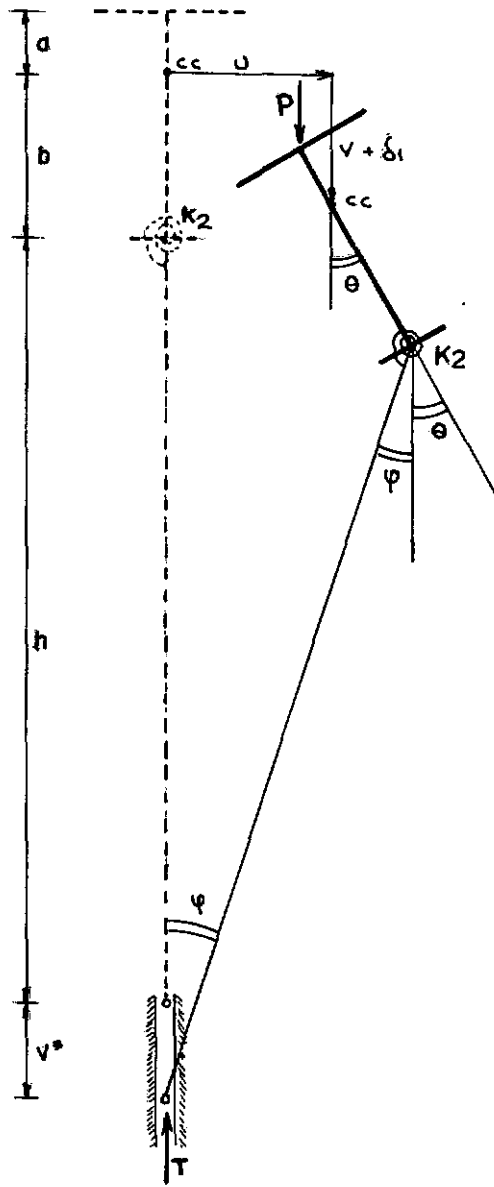


FIGURA (3.6)

Ainda da figura (3.6) tiramos que:

$$u = h \operatorname{sen} \phi - b \operatorname{sen} \theta \quad (3.40)$$

para pequenos ângulos: $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$, $\operatorname{sen} \phi \approx \phi$ \therefore

$$\operatorname{sen} \phi \approx \phi \approx \frac{u+b \operatorname{sen} \theta}{h} \quad (3.40.a)$$

Substituindo (3.40.a) em (3.39), chega-se a:

$$V^* = \frac{b\theta^2}{2} + \frac{h}{2} \left(\frac{u^2 + 2bu\theta + b^2\theta^2}{h^2} \right) - v \quad (3.41)$$

O trabalho efetuado por K_2 será dado por:

$$V_1 = \frac{1}{2} K_2 (\theta + \phi)^2 = \frac{1}{2} K_2 \left[\theta + \left(\frac{u + b\theta}{h} \right) \right]^2 \quad (3.42)$$

e que desenvolvendo chega-se a:

$$V_1 = \frac{K_2}{2} (c_1 u^2 + c_2 u\theta + c_3 \theta^2) \Big|_{z=z_t} \quad (3.43)$$

sendo:

$$c_1 = \frac{1}{h^2}$$

$$c_2 = \left(\frac{2}{h} + \frac{2b}{h^2} \right)$$

$$c_3 = \left(1 + \frac{b}{h} \right)^2$$

3.3.1.4 - TRABALHO DAS FORÇAS EXTERNAS (W)

As reações provocadas pelo cabo e pelo montante provenientes de uma tensão σ na haste serão considerados como esforços externos juntamente com o carregamento P (o qual se deseja determinar o seu valor crítico de instabilidade). Se o montante está vinculado à haste rigidamente o trabalho realizado por T será não conservativo (W^{NC}). São as chamadas "follow er forces" ou "forças seguidoras".

Se o montante está articulado elasticamente à

haste o trabalho realizado por T será conservativo como mostra a Figura (3.6).

A Figura (3.10) nos dá a idéia do trabalho não conservativo de T. Nos dois casos anteriores o trabalho de P será conservativo.

Passa-se a determinar as parcelas correspondentes ao trabalho das forças externas.

- 1) Trabalho realizado por N correspondente ao encurtamento da haste. A energia de deformação em função do esforço solicitante N é dada por:

$$W_N = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dz \quad (3.44)$$

onde:

A = área da seção transversal da haste

E = módulo de elasticidade (módulo de Young)

N = esforço de compressão provocado por T_0

Da expressão (3.16), substituindo em (3.44) obtem-se:

$$W_N = \int_0^L \left[\frac{T_0 (z_p (b-a) + aL)}{ab} \right]^2 \cdot \frac{1}{2EA} dz \quad \therefore$$

$$W_N = \frac{T_0^2 L}{2EA} \left[\frac{z_p (b-a) + aL}{ab} \right]^2 = \text{Constante} \quad (3.45)$$

- 2) Parcela referente ao trabalho realizado por N devido a interação esforço normal-flexão.

Da Figura (3.7) , quando um elemento de comprimento dz passa para uma configuração de comprimento ds , o esforço N , situado no centro de gravidade (CG) da seção, realiza um trabalho que é dado por:

$$W_1 = \int_0^L N(ds - dz) = \int_0^L N \left(\frac{ds}{dz} - 1 \right) dz \quad (3.46)$$

O elemento ds é dado por (ver Figura 3.7)

$$ds = \sqrt{dz^2 + dv^{*2} + du^{*2}} \quad \therefore \quad \frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2} \quad (3.47)$$

Desenvolvendo em série de Taylor, obtém-se:

$$\frac{ds}{dz} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^4 + \dots$$

Desprezando-se $\left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^4$ e $\left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^4$ em presença de $\left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^2$ e $\left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2$ vem:

$$\frac{ds}{dz} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2 \quad (3.48)$$

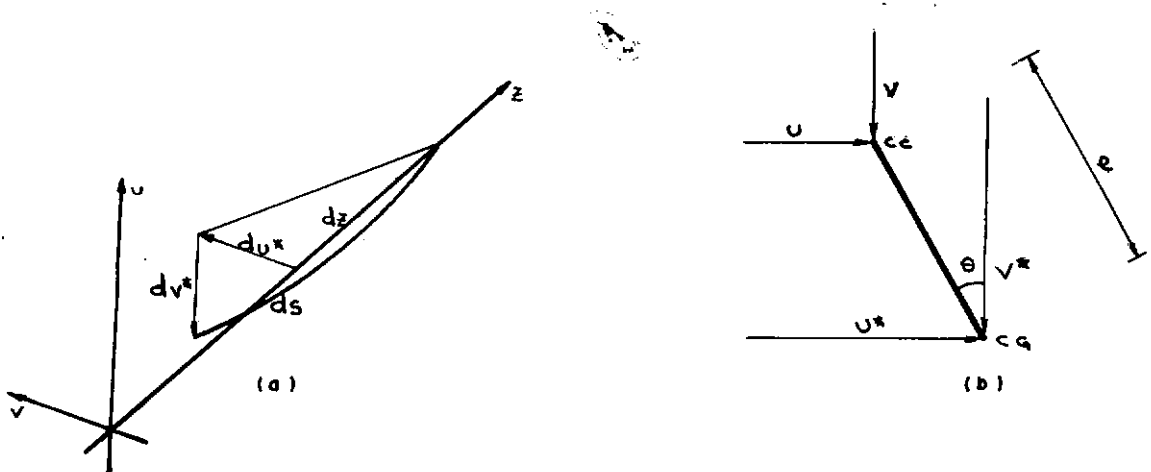


FIGURA (3.7)

Substituindo-se (3.48) em (3.46), obtem-se:

$$W_1 = \int_0^L \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} \right)^2 + \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3.49)$$

As coordenadas u^* e v^* são referidas ao CG da seção. Fazendo-se uma mudança de coordenadas para o CC, origem do sistema de coordenadas. Assim da figura (3.7.b) tiramos que:

$$v^* = v + e \cos \theta \approx v + e$$

$$u^* = u + e \sin \theta \approx u + e \theta \quad . \quad .$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + e \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Substituindo estas relações em (3.49), obtem-se finalmente:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_0^L N \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2e \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + e^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (3.50)$$

3) Trabalho do esforço externo P que atua na coordenada z_p será sempre conservativo. Para a determinação do abaixamento da carga P durante a flambagem lateral, consideremos as reações provocadas por P mostradas na figura (3.8) cujos valores são:

$$P_1 = \frac{P}{L}(L - z_p) \quad (3.51)$$

$$P_2 = \frac{P z_p}{L} \quad (3.52)$$

Para facilitar a compreensão dessa dedução supomos que

na coordenada z_p , ponto de aplicação de P , haja um engastamento e que existem duas hastes em balanço de comprimentos z_p e $L - z_p$ sujeitas aos carregamentos P_1 e P_2 respectivamente. Considerando um elemento infinitesimal dz situado no eixo longitudinal da haste. Há uma curvatura deste elemento no plano xOz , sendo a seção abaixo do ponto de aplicação de P considerada fixa.

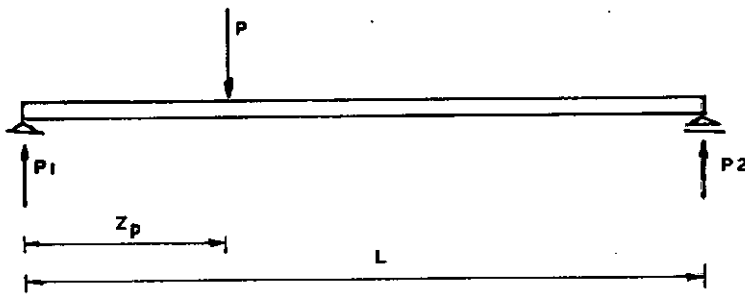
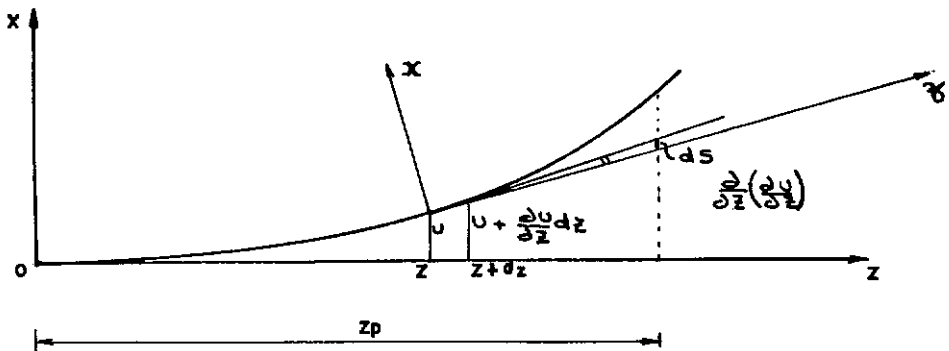


FIGURA (3.8)

Na figura (3.9), a variação da tangente à linha elástica é dada pela segunda variação do deslocamento u , ou seja $\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})$, que é o mesmo que curvatura.



FIGURA(3.9)

A extremidade da haste descreve um comprimento de arco infinitesimal ds , dado por:

$$ds = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) (z_p - z) dz$$

no plano xOz .

A componente vertical deste comprimento de arco é dada por (ver figura (3.10)):

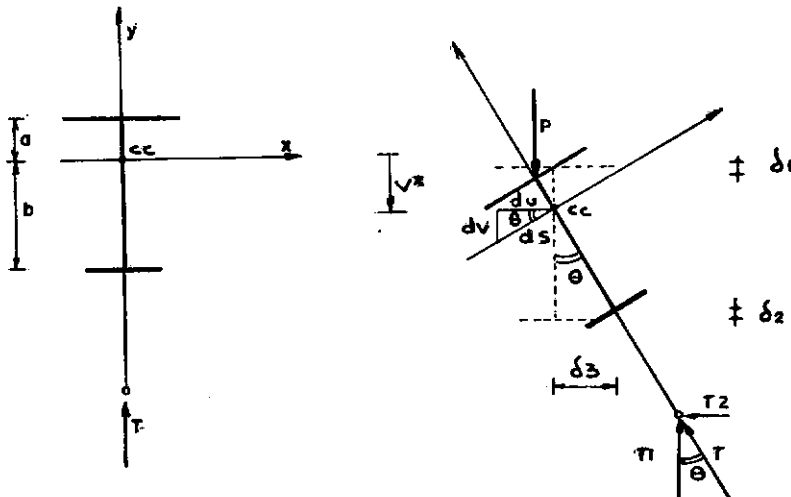
$$dv = \theta ds = \theta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} (z_p - z) dz \quad (3.53)$$

O abaixamento do ponto de aplicação da carga P devido a flambagem lateral da haste é obtido pela soma de todas as componentes dv da haste entre $0-z_p$ ou z_p-L . O trabalho de P será a soma dos trabalhos de P_1 e de P_2 . Então, tem-se:

$$W_P^C = P v^* \Big|_{z_p} + \int_0^{z_p} P_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) z dz + \int_{z_p}^L P_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) (L-z) dz + P \delta_1$$

sendo que:

$$v^* = v \cos \theta \approx v$$



FIGURA(3.10)

$$\delta_1 = a(1 - \cos \theta) \approx a \frac{\theta^2}{2}, \text{ vem:}$$

$$W_p^c = Pv \Big|_{z_p} + \int_0^{z_p} \frac{P(L-z_p)}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) z dz + \int_{z_p}^L \frac{Pz_p}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) (L-z) dz +$$

$$+ \frac{Pa}{2} \theta^2 \Big|_{z_p} \quad (3.54)$$

4) O trabalho do esforço T proveniente da ação do cabo no montante é diferente em cada um dos casos. Senão vejamos:

4.1) No caso em que o sistema é conservativo (Caso II), da figura (3.6) tiramos que o trabalho de T resultará:

$$W_T^c = T v^* \quad (3.55)$$

Com (3.41), substituindo em (3.55), vem:

$$W_T^c = T \left[\frac{b\theta^2}{2} + \frac{1}{2h} (u^2 + 2ub\theta + b^2\theta^2) \right] \quad (3.56)$$

4.2) No caso em que o sistema é não conservativo (Caso I) da figura (3.10) tiramos que o trabalho de T resultará:

$$W_T^{NC} = -T_1 v^* \Big|_{z_T} - \int_0^{z_T} T_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) z dz - \int_{z_T}^L T_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) (L-z) dz$$

$$+ T_1 \delta_2 - T_2 (u + \delta_3) \quad (3.57)$$

sendo que:

$$T_1 = T \cos \theta \approx T$$

$$T_2 = T \sin \theta \approx T_\theta$$

$$T_{11} = T \frac{(L-z_T)}{L}$$

$$T_{12} = \frac{Tz_T}{L}$$

$$\delta_2 = b(1 - \cos \theta) \approx b \frac{\theta^2}{2}$$

$$\delta_3 = b \sin \theta \approx b\theta$$

$$v^* = v \cos \theta \approx v$$

Substituindo tudo em (3.57) e fazendo $z_T = z_p$ chega-se a:

$$\begin{aligned} W_T^{NC} = & -Tv - \int_0^{z_p} \frac{T(L-z_T)}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z} \right) (\theta) z dz - \int_{z_p}^L \frac{Tz_T}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) (L-z) dz \\ & + T \frac{b\theta^2}{2} \Big|_{z_T} - T\theta u \Big|_{z_T} - Tb\theta^2 \Big|_{z_T} \end{aligned} \quad (3.58)$$

A Energia Potencial Total Π será a soma da energia de deformação da haste com o trabalho das forças externas

$$\Pi = -V + W \quad (3.59)$$

Por outro lado a energia de deformação da haste é a soma das parcelas U_0 , V_0 , V_1 , portanto:

$$V = U_0 + V_0 + V_1 \quad (3.60)$$

Substituindo (3.60) em (3.59), vem:

$$\Pi = -(U_0 + V_0 + V_1) + W_i \quad (i=1,2) \quad (3.61)$$

No caso em que o sistema é não conservativo o trabalho das forças externas W_i será:

$$W_1 = W_p^c + W_T^{NC} + W_N + W_I \quad (3.62)$$

No caso em que o sistema é conservativo o trabalho das forças externas W_i será:

$$W_2 = W_p^c + W_T^c + W_N + W_I \quad (3.63)$$

Olhando para a expressão (3.45), parcela correspondente ao trabalho realizado por N no encurtamento da haste, nota-se que se trata de um valor constante e que sua variação é nula durante o estudo. Sendo assim, pode-se agrupá-lo com o nível inicial de energia U_0 também constante.

$$\bar{U}_0 = U_0 + W_N$$

$$\bar{U}_0 = U_0 + \frac{T_0 L}{2EA} \left[\frac{z_p (b-a) + aL}{ab} \right] = \text{constante} \quad (3.64)$$

Introduzindo (3.64) em (3.61), vem:

$$\pi = -(\bar{U}_0 + V_0 + V_1) + W_i \quad (3.65)$$

Substituindo (3.37), (3.38), (3.43), (3.50), (3.54) (3.56), (3.58) em (3.65),

para $i = 1$

$$\begin{aligned} \pi = & -\left\{ \bar{U}_0 + \int_0^L \left[\frac{EI}{2} x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{EI}{2} y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{GC_T}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{EC_w}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz + \right. \\ & + \frac{1}{2} K_1 \theta^2 \Big|_{z=L} \Big\} + \frac{N}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2e \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + e^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \\ & + (P-T) v \Big|_{z_p=z_T} + (P-T) \int_0^{z_p} \frac{(L-z_p)}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) z dz + (P-T) \int_{z_p}^L \frac{z_p}{L} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) (L-z) dz + (Pa-Tb) \frac{\theta^2}{2} \Big|_{z_p=z_T} - T\theta u \Big|_{z=z_T} \end{aligned} \quad (3.66)$$

para $i = 2$

$$\begin{aligned}
\pi = & -\{\bar{U}_0 + \int_0^L \left[\frac{EI_x}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{EI_y}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{GC_T}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{EC_w}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz + \\
& + \frac{1}{2} K_1 \theta^2 \Big|_{z=L} + \frac{1}{2} K_2 (c_1 u^2 + c_2 u \theta + c_3 \theta^2) \Big|_{z=z_T} \} + \frac{N}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2e \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + e^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz + P v \Big|_{z=z_p} + P \int_0^{z_p} \frac{z_p(L-z)}{L} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) z dz + P \int_{z_p}^L \frac{z_p}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) (L-z) dz + P a \frac{\theta^2}{2} \Big|_{z=z_p} - \\
& - T \left[\frac{b \theta^2}{2} + \frac{1}{2h} (u^2 + 2b u \theta + b^2 \theta^2) \right] \Big|_{z=z_T}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

CAPÍTULO IV

MONTAGEM E MINIMIZAÇÃO DO FUNCIONAL

O funcional que iremos montar é também conhecido por "Lagrangeano" ou "Potencial Cinético". E é dele que se obtém através da sua minimização as "equações de Euler-Lagrange" ou "equações do movimento" e as "condições de contorno naturais".

4.1 - MONTAGEM DO FUNCIONAL (L)

A Energia Total (L) do sistema é dada por:

$$L = T + \Pi \quad (4.1)$$

sendo que:

T = energia cinética

Π = energia potencial total

onde:

$$\Pi = -V + W$$

$$L = T - V + W_i \quad (i=1,2) \quad (4.2)$$

Considerando somente os termos lineares de (3.14) para o Caso I, o Lagrangeano será:

$$L = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + K^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] dz + \rho A e \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dz -$$

$$\begin{aligned}
& - \{ \bar{U}_0 + \int_0^L \left[\frac{EI_x}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{EI_y}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{GC_T}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{EC_w}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz + \\
& + \frac{1}{2} K_1 \theta^2 \Big|_{z=L} \} + \frac{N}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + 2e \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + e^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \\
& + (P-T)v \Big|_{z_p=z_T} + (P-T) \int_0^{z_p} \frac{P(L-z)}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) z dz + (P-T) \int_{z_p}^L \frac{z}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) \cdot \\
& (L-z) dz + (Pa-Tb) \frac{\theta^2}{2} \Big|_{z_p=z_T} = T\theta u \Big|_{z=z_T} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Para o caso II, o Lagrangeano será :

$$\begin{aligned}
L = & \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + K^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] dz + \rho A e \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dz - \\
& - \{ \bar{U}_0 + \int_0^L \left[\frac{EI_x}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{EI_y}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{GC_T}{2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{EC_w}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz + \\
& + \frac{1}{2} K_1 \theta^2 \Big|_{z=L} + \frac{1}{2} K_2 (c_1 u^2 + c_2 u \theta + c_3 \theta^2) \Big|_{z=z_T} \} + \frac{N}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2e \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + e^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz + Pv \Big|_{z=z_p} + \\
& + P \int_0^{z_p} \frac{(L-z)}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) z dz + P \int_{z_p}^L \frac{z}{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\theta) (L-z) dz + \\
& + Pa \frac{\theta^2}{2} \Big|_{z=z_p} - T \left[\frac{b\theta^2}{2} + \frac{1}{2h} (u^2 + 2bu\theta + b^2\theta^2) \right] \Big|_{z=z_T} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

4.2. APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DE HAMILTON

Do Princípio de Hamilton, tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0 \quad (4.5)$$

Para sistemas holonômicos (ver Apendice II) pode-se permutar os símbolos \int e δ , de (4.5) obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + \Pi) dt = 0 \quad (4.6)$$

4.3.- MINIMIZAÇÃO DO FUNCIONAL (L)

Imagina-se que a estrutura esteja num estado de equilíbrio sob o carregamento P.

Dando uma perturbação, como por exemplo: força de impacto ou qualquer ação externa, tirando-a da posição de estabilidade.

Cessada a causa externa, esta entrará em estado de vibração com frequência ω .

Assumindo a forma geral de soluções no espaço e no tempo como sendo:

$$\begin{aligned} u &= u(z, t) \\ v &= v(z, t) \\ \theta &= \theta(z, t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

tem-se soluções do tipo complexa e complexa conjugada, assim:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}, u &= u(z) e^{\pm i\omega t} \\
 \bar{v}, v &= v(z) e^{\pm i\omega t} \\
 \bar{\theta}, \theta &= \theta(z) e^{\pm i\omega t}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

sendo $u(z)$, $v(z)$, $\theta(z)$ as amplitudes do movimento.

Para o estado de equilíbrio "estável", entra-se com a justificativa física suficiente para assegurar que cada frequência de vibração ω tem que ser real, em outras palavras todas as soluções para ω^2 terão que ser positivas.

A frequência de vibração decidirá qual será o tipo de movimento e se o equilíbrio é ou não estável. Como soluções do tipo complexa, as duas formas: complexa e complexa conjugada satisfazem, deve-se tomar as duas.

Para simplificar a notação, façamos:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v_t$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v_{tt}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = v_z \quad \text{analogamente para as demais.}$$

Derivando (4.8) em relação ao tempo t , vem:

$$v_t = vi\omega e^{i\omega t}$$

$$\bar{v}_t = -vi\omega e^{-i\omega t}$$

$$v_{tt} = v_t \cdot \bar{v}_t = (vi\omega e^{i\omega t})(-vi\omega e^{-i\omega t}) = v^2\omega^2$$

Analogamente:

$$\theta_t = \theta i \omega e^{i \omega t}$$

$$\bar{\theta}_t = -\theta i \omega e^{-i \omega t}$$

$$\theta_t^2 = \theta^2 \omega^2$$

$$u_t = u i \omega e^{i \omega t}$$

$$\bar{u}_t = -u i \omega e^{-i \omega t}$$

$$u_t^2 = u^2 \omega^2$$

$$v_t \cdot \theta_t = (v i \omega e^{i \omega t}) \theta (-i \omega) e^{-i \omega t} = \omega^2 v \theta$$

Derivando (4.8) em relação a z , obtem-se:

$$u_z = u_z e^{i \omega t}$$

$$\bar{u}_z = u_z e^{-i \omega t}$$

$$u_z^2 = u_z \cdot \bar{u}_z = u_z^2$$

$$u_{zz} = u_{zz} e^{i \omega t}$$

$$\bar{u}_{zz} = u_{zz} \cdot e^{-i \omega t}$$

$$u_{zz}^2 = u_{zz} \cdot \bar{u}_{zz} = u_{zz}^2$$

Analogamente

$$\theta_z^2 = \theta_z \cdot \bar{\theta}_z = \theta_z^2$$

$$\theta_{zz}^2 = \theta_{zz} \cdot \bar{\theta}_{zz} = \theta_{zz}^2$$

$$u_{zz} \cdot \theta = (u_{zz} e^{i \omega t}) (\bar{\theta} e^{-i \omega t}) = u_{zz} \cdot \theta \quad (4.9)$$

Substituindo-se as expressões (4.9) em (4.6), no-

ta-se que ela ficou independente do tempo t . Dessa forma de (4.6) tem-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{z_1}^{z_2} L dz (t_2 - t_1) \rightarrow \text{Mínimo} \quad (4.10)$$

Sendo os instantes t_1 e t_2 arbitrários resta agora determinar o mínimo do seguinte funcional

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} L dz = 0 \quad (4.11)$$

e que corresponde a um valor estacionário da energia total do sistema.

O Princípio Variacional de Hamilton^[3] é o ponto de partida para se estabelecer as equações do movimento para pe pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio da estrutura sob um estado de carregamento P .

Substituindo-se (4.9) em (4.3) e em (4.11) resulta:

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^L \left(\frac{m}{2} \omega^2 u^2 + \frac{mK^2}{2} \omega^2 \theta^2 + m e \omega^2 u \theta + \frac{m}{2} \omega^2 v^2 \right) dz - \delta \bar{U}_0 - \delta \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (v_{zz})^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{EI}{2} (u_{zz})^2 + \frac{GC_T}{2} (\theta_z)^2 + \frac{EC}{2} (\theta_{zz})^2 \right] dz - \delta \left(\frac{1}{2} K_1 \theta^2 \Big|_{z=L} \right) + \\ & \quad + \left(\frac{N}{2} \right) \delta \int_0^L \left[(v_z)^2 + (u_z)^2 + 2e(u_z)(\theta_z) + e^2(\theta_z)^2 \right] dz + (P-T) \delta v \Big|_{z_p=z_T} + \\ & \quad + (P-T) \left[\frac{(L-z_p)}{L} \right] \delta \int_0^{z_p} (u_{zz})(\theta) z dz + (P-T) \left(\frac{z_p}{L} \right) \delta \int_{z_p}^L (u_{zz})(\theta) \cdot \\ & \quad \cdot (L-z) dz + \left(\frac{Pa - Tb}{2} \right) \delta \theta^2 \Big|_{z_p=z_T} - T \delta (u \cdot \theta) \Big|_{z=z_T} = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo (4.9) em (4.4) e em (4.11) resulta:

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_0^L \left(\frac{m}{2} \omega^2 u^2 + \frac{mk^2}{2} \omega^2 \theta^2 + m\omega^2 u\theta + \frac{m}{2} \omega^2 v^2 \right) dz - \delta \bar{U}_0 - \delta \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (v_{zz})^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{EI}{2} (u_{zz})^2 + \frac{GC_T}{2} (\theta_z)^2 + \frac{EC}{2} (\theta_{zz})^2 \right] dz - \delta \left(\frac{1}{2} K_1 \theta^2 \Big|_{z=L} \right) + \\
 & \quad + \left(\frac{N}{2} \right) \delta \int_0^L \left[(v_z)^2 + (u_z)^2 + 2e(u_z)(\theta_z) + e^2(\theta_z)^2 \right] dz - \delta \left[\frac{1}{2} K_2 (c_1 u^2 + \right. \\
 & \quad \left. + c_2 u\theta + c_3 \theta^2) \right] \Big|_{z=z_T} + P \cdot \delta v \Big|_{z_p} + P \left[\frac{(L-z_p)}{L} \right] \delta \int_0^{z_p} (u_{zz})(\theta) z dz + \\
 & \quad + P \left(\frac{z_p}{L} \right) \delta \int_{z_p}^L (u_{zz})(\theta)(L-z) dz + \frac{Pa}{2} \delta \theta^2 \Big|_{z_p} - T \delta \left[\frac{b\theta^2}{2} + \frac{1}{2h} (u^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 2bu\theta + b^2\theta^2) \right] \Big|_{z=z_T} = 0 \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Genericamente, o problema consiste em determinar o extremo de um funcional de três campos (u, v, θ) contendo as seguintes funções:

$$J[u, v, \theta] = \delta \int_0^L F[u, v, \theta, u_z, v_z, \theta_z, u_{zz}, v_{zz}, \theta_{zz}, z] dz + \delta f_i(u, v, \theta) \tag{4.14}$$

(i=1,2)

ou

$$J[u, v, \theta] = \delta I_1 + \delta I_{2i} \tag{4.15}$$

(i=1,2)

onde z é a única variável independente, e $I_{2i} = \delta f_i(u, v, \theta)$ aparecerá como condição de contorno natural. Como em algum ponto poderá existir descontinuidade em alguma derivada das funções,

ou mesmo nas funções, como por exemplo: o esforço cortante sofrerá uma descontinuidade em v_{zzz} e u_{zzz} na coordenada $z = z_p$. Em vista de que neste estudo não se está considerando a energia de deformação devido ao cisalhamento, não haverá este problema, mas de uma maneira geral ter-se-ia:

As funções u, v, θ são sempre de classe C^2 em relação à variável z , com exceção do ponto $z = z_p$, na qual poderá haver alguma descontinuidade.

Em virtude disso, no funcional F , é necessário fazer a variação em trechos contínuos, passando, desse modo a ter o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
 J_i[u, v, \theta] = & \delta \int_0^{z_p^-} F[u, v, \theta, u_z, v_z, \theta_z, u_{zz}, v_{zz}, \theta_{zz}, u_{zzz}, v_{zzz}, z] dz + \\
 & + \delta \int_{z_p^+}^L F[u, v, \theta, u_z, v_z, \theta_z, u_{zz}, v_{zz}, \theta_{zz}, u_{zzz}, v_{zzz}, z] dz + \\
 & + \delta f_i(u, v, \theta) \qquad (i=1, 2) \qquad (4.16)
 \end{aligned}$$

Suponhamos que existam

$$u = u^*(z)$$

$$v = v^*(z)$$

$$\theta = \theta^*(z)$$

funções estas que minimizam o funcional I_1 . Qualquer outra função candidata pode ser representada, em um campo de funções admissíveis, como sendo uma família de funções candidatas, assim expres-

sas:

$$u(z) = u^*(z) + \epsilon_1 \eta(z)$$

$$v(z) = v^*(z) + \epsilon_2 \rho(z)$$

$$\theta(z) = \theta^*(z) + \epsilon_3 \phi(z)$$

$$u_z(z) = u_z^*(z) + \epsilon_1 \eta_z(z)$$

$$v_z(z) = v_z^*(z) + \epsilon_2 \rho_z(z)$$

$$\theta_z(z) = \theta_z^*(z) + \epsilon_3 \phi_z(z)$$

$$u_{zz}(z) = u_{zz}^*(z) + \epsilon_1 \eta_{zz}(z)$$

$$v_{zz}(z) = v_{zz}^*(z) + \epsilon_2 \rho_{zz}(z)$$

$$\theta_{zz}(z) = \theta_{zz}^*(z) + \epsilon_3 \phi_{zz}(z)$$

4.4 - EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE E CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAIS

Aplicando-se o "Cálculo das Variações" em (4.15),

chega-se a:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial z} (F_{u_z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (F_{u_{zz}}) = 0$$

$$F_v - \frac{\partial}{\partial z} (F_{v_z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (F_{v_{zz}}) = 0$$

$$F_\theta - \frac{\partial}{\partial z} (F_{\theta_z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (F_{\theta_{zz}}) = 0 \quad (4.17)$$

e

$$F_{u_{zz}} \eta_z + \left[F_{u_z} - \frac{\partial}{\partial z} (F_{u_{zz}}) \right] \eta$$

$$F_{v_{zz}} \rho_z + \left[F_{v_z} - \frac{\partial}{\partial z} (F_{v_{zz}}) \right] \rho$$

$$F_{\theta_{zz}} \phi_z + \left[F_{\theta_z} - \frac{\partial}{\partial z} (F_{\theta_{zz}}) \right] \phi \quad (4.18)$$

Onde as equações (4.17) são as chamadas equações de "Euler-Lagrange" ou equações do "Movimento", e (4.18) são as chamadas "condições de contorno naturais" por aparecerem naturalmente da minimização do funcional I_1 .

Ao se fazer a variação de I_{2i} , deve-se ter em conta que esta variação é discreta, ou seja: em torno de um ponto, e não de uma forma contínua como em I_1 .

para $i = 1$ (CASO 1) vem:

$$\delta f_1(u, v, \theta) = \delta \left[-\frac{1}{2} K_1 \theta^2 + \left(\frac{Pa - Tb}{2} \right) \theta^2 - T(\theta)(u) + (P - T)v \right] = 0 \quad (4.19)$$

A condição para a existência de um extremo para I_2 é:

$$\delta f_i = \frac{\partial I_{2i}}{\partial \epsilon_j} \Big|_{\epsilon_j=0} = 0 \quad (j=1, 2, 3), \quad (i=1, 2) \quad (4.20)$$

Donde, substituindo a família de funções candidatas em (4.20) tem-se:

$$I_{21} = -\frac{1}{2} K_1 (\theta^* + \epsilon_3 \phi)^2 + \left(\frac{Pa - Tb}{2} \right) (\theta^* + \epsilon_3 \phi)^2 - T(u^* + \epsilon_1 \eta) (\theta^* + \epsilon_3 \phi) + (P - T)(v^* + \epsilon_2 \rho) \quad (4.21)$$

De (4.20), para $j = 1$

$$\frac{\partial I_{21}}{\partial \epsilon_1} \Big|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0} = -T \theta \eta \quad (4.22)$$

para $j = 2$

$$\left. \frac{\partial I_{21}}{\partial \epsilon_2} \right|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0} = (P - T) \rho \quad (4.23)$$

para $j = 3$

$$\left. \frac{\partial I_{21}}{\partial \epsilon_3} \right|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0} = -K_1 \theta \phi + (Pa - Tb) \theta \phi - Tu \phi \quad (4.24)$$

para $i = 2$ (CASO II), vem:

$$\begin{aligned} \delta f_2(u, v, \theta) = & \delta \left[-\frac{1}{2} K_1 \theta^2 - \frac{1}{2} K_2 (c_1 u^2 + c_2 u \theta + c_3 \theta^2) + P \cdot v + \right. \\ & \left. + \frac{Pa}{2} \theta^2 - T \left[\frac{b \theta^2}{2} + \frac{1}{2h} (u^2 + 2bu\theta + b^2 \theta^2) \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Donde, substituindo-se a família de funções candidatas em (4.20), tem-se:

$$\begin{aligned} I_{22} = & -\frac{1}{2} K_1 (\theta^* + \epsilon_3 \phi)^2 - \frac{1}{2} K_2 [c_1 (u^* + \epsilon_1 \eta)^2 + c_2 (u^* + \epsilon_1 \eta) \cdot \\ & \cdot (\theta^* + \epsilon_3 \phi) + c_3 (\theta^* + \epsilon_3 \phi)^2] + P(v^* + \epsilon_2 \rho) + \frac{Pa}{2} (\theta^* + \epsilon_3 \phi)^2 - \\ & - T \left\{ \frac{b}{2} (\theta^* + \epsilon_3 \phi)^2 + \frac{1}{2h} [u^* + \epsilon_1 \eta]^2 + 2b(u^* + \epsilon_1 \eta)(\theta^* + \epsilon_3 \phi) + \right. \\ & \left. + b^2 (\theta^* + \epsilon_3 \phi)^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

De (4.20), para $j = 1$

$$\left. \frac{\partial I_{22}}{\partial \epsilon_1} \right|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0} = -\frac{1}{2} K_2 [2c_1 u + c_2 \theta] \eta - \frac{T}{h} (u + b\theta) \eta \quad (4.27)$$

para $j = 2$

$$\left. \frac{\partial I_{22}}{\partial \epsilon_2} \right|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0} = P \rho \quad (4.28)$$

para $j = 3$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{22}}{\partial \epsilon_3} \right|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3} = & -K_1 \theta \phi - \frac{K_2}{2} (c_2 u + 2c_3 \theta) \phi + P \bar{a} \theta \phi - T [b \theta + \\ & + \frac{1}{h} (b u + b^2 \theta)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

De posse das equações (4.17), e aplicando em (4.12) obtem-se as equações diferenciais a derivadas parciais do movimento.

CASO 1:

$$\begin{aligned} 1) \quad m\omega^2 (u + e\theta) - \frac{\partial}{\partial z} \left[N(u_z + e\theta_z) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-EI_y (u_{zz}) + \right. \\ \left. + (P-T) \left(z + z_p - \frac{2zz_p}{L} \right) (\theta) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.29.1)$$

$$2) \quad m\omega^2 v - \frac{\partial}{\partial z} \left[N(v_z) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-EI_x (v_{zz}) \right] = 0 \quad (4.29.2)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad m\omega^2 (eu + K^2 \theta) + (P-T) \left(z + z_p - \frac{2zz_p}{L} \right) (u_{zz}) - \frac{\partial}{\partial z} \left[-GC_T \right. \\ \left. (\theta_z) + Ne(u_z + e\theta_z) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-EC_w (\theta_{zz}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.29.3)$$

Analogamente, de posse das equações (4.17) e aplicando em (4.13), obtem-se as equações diferenciais a derivadas parciais do movimento.

CASO II:

$$1) \quad m\omega^2(u+e\theta) - \frac{\partial}{\partial z} \left[N(u_z + e\theta_z) \right] - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-EI_y(u_{zz}) + P(z+z_p - \frac{2z_z p}{L})(\theta) \right] = 0 \quad (4.30.1)$$

$$2) \quad m\omega^2 v - \frac{\partial}{\partial z} \left[N(v_z) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-EI_x(v_{zz}) \right] = 0 \quad (4.30.2)$$

$$3) \quad m\omega^2(eu + K^2\theta) + P(z+z_p - \frac{2z_z p}{L})(u_{zz}) - \frac{\partial}{\partial z} \left[-GC_T(\theta_z) + Ne(u_z + e\theta_z) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-EC_w(\theta_{zz}) \right] = 0 \quad (4.30.3)$$

Aplicando-se (4.12) em (4.18) e adicionando-se o resultando da variação em (4.19), vem:

CASO I:

$$1) \quad \left[-EI_y(u_{zz}) \right] \Big|_0^L \eta_z + \left[(P-T)(z+z_p - \frac{2z_z p}{L})\theta \right] \Big|_{z_p} \eta_z + \{N(u_z) - \frac{\partial}{\partial z} \left[-EI_y(u_{zz}) \right] \} \Big|_0^L \eta + \left[(P-T)(z+z_p - \frac{2z_z p}{L})\theta \right] \Big|_{z_p} \eta - T\theta \Big|_{z_p} \eta \quad (4.31.1)$$

$$2) \quad \left[-EI_x(v_{zz}) \right] \Big|_0^L \rho_z + \{N(v_z) - \frac{\partial}{\partial z} \left[-EI_x(v_{zz}) \right] \} \Big|_0^L \rho + (P-T)\rho \quad (4.31.2)$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \left[-EC_w(\theta_{zz}) \right] \Big|_0^L \phi_z + \{ -GC_T(\theta_z) + Ne(u_z + e\theta_z) - \frac{\partial}{\partial z} \left[-EC_w(\theta_{zz}) \right] \} \Big|_0^L \phi + \\
 & + (-K_1 \theta) \Big|_{z_p} \phi + \left[(Pa - Tb) \theta - Tu \right] \Big|_{z_p} \phi \quad (4.31.3)
 \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando (4.13) em (4.18) e adicionando-se o resultado da variação em (4.25), vem:

CASO II:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \left[-EI_y(u_{zz}) \right] \Big|_0^L \eta_z + \left[P(z + z_p - \frac{2z_z p}{L}) \theta \right] \Big|_{z_p} \eta_z + \{ N(u_z) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \left[-EI_y(u_{zz}) \right] \} \Big|_0^L \eta + \left[P(z + z_p - \frac{2z_z p}{L}) \theta - \right. \\
 & \left. - \frac{K_2}{2}(2c_1 u + c_2 \theta) - \frac{T}{h}(u + b\theta) \right] \Big|_{z_p} \eta \quad (4.32.1)
 \end{aligned}$$

$$2) \quad \left[-EI_x(v_{zz}) \right] \Big|_0^L \rho_z + \{ N(v_z) - \frac{\partial}{\partial z} \left[-EI_x(v_{zz}) \right] \} \Big|_0^L \rho + P\rho \quad (4.32.2)$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \left[-EC_w(\theta_{zz}) \right] \Big|_0^L \phi_z + \{ -GC_T(\theta_z) + Ne(u_z + e\theta_z) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \left[-EC_w(\theta_{zz}) \right] \} \Big|_0^L \phi + (-K_1 \theta) \Big|_{z=L} \phi + \{ Pa \theta - T \left[b\theta + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{h}(bu + b^2 \theta) - \frac{K_2}{2}(c_2 u + 2c_3 \theta) \right] \} \Big|_{z_p} \phi \quad (4.32.3)
 \end{aligned}$$

4.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO IMPOSTAS OU GEOMÉTRICAS

Em virtude das restrições a deslocamentos e imposições físicas, como por exemplo, momentos fletores iguais a zero nas extremidades, as condições de contorno geométricas serão:

$$u(0) = u(L) = 0$$

$$v(0) = v(L) = 0$$

$$u_{zz}(0) = u_{zz}(L) = 0$$

$$v_{zz}(0) = v_{zz}(L) = 0 \quad (4.33)$$

Se houver restrição com relação à torção nas duas extremidades $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, teremos:

$$\theta(0) = \theta(L) = 0$$

$$\theta_z(0) \neq 0$$

$$\theta_z(L) \neq 0$$

$$\theta_{zz}(0) \neq 0$$

$$\theta_{zz}(L) \neq 0 \quad (4.34.1)$$

E, se houver restrição com relação à torção somente em uma extremidade $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, teremos:

$$\theta(0) = 0$$

$$\theta(L) \neq 0$$

$$\theta_z(0) \neq 0$$

$$\theta_z(L) \neq 0$$

$$\theta_{zz}(0) \neq 0$$

$$\theta_{zz}(L) \neq 0 \quad (4.34.2)$$

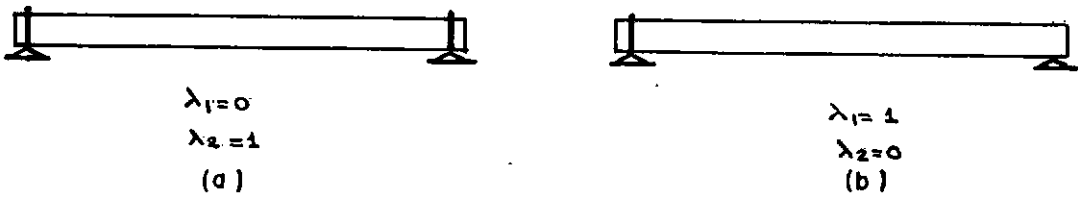


FIGURA (4.1)

Combinando-se as condições de contorno geométricas com as condições de contorno naturais obtém-se diferentes problemas. Assim na expressão (4.31.1), para a condição de contorno geométrica $u_{zz}(0) = u_{zz}(L) = 0$, ter-se-á como condição de contorno natural $\eta = \eta_z = 0$, obrigatoriamente do lema fundamental do Cálculo das Variações. No caso particular em que $P = T$, sobra $\eta = 0$. Para $u_{zz}(0) \neq 0$, $u_{zz}(L) \neq 0$, o que corresponderia a um engastamento nas extremidades tem-se que ter $\eta = \eta_z = 0$.

Na expressão (4.31.2) para a condição de contorno geométrica $v_{zz}(0) = v_{zz}(L) = 0$, ter-se-á como condição de contorno natural $\rho = 0$, obrigatoriamente.

No caso particular em que $N = 0$ e $P = T$ implica em $\rho = \text{qualquer}$. Para $v_{zz}(0) \neq 0$, $v_{zz}(L) \neq 0$, teríamos que ter $\rho = \rho_z = 0$, obrigatoriamente.

Para a expressão (4.31.3) é necessário somente $\phi_z = \phi = 0$, já que de (4.34.1) tira-se $\theta_z(0) \neq 0$, $\theta_z(L) \neq 0$, $\theta_{zz}(0) \neq 0$, $\theta_{zz}(L) \neq 0$, e em $u(z_p) \neq 0$, $\theta(z_p) \neq 0$.

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ5.1 - CONSIDERAÇÕES

A questão da estabilidade pode ser respondida pelo exame da equação variacional (4.14).

A resolução do problema na forma em que está apresentado é mais adequada pela integração do sistema de equações diferenciais analiticamente ou em outras palavras de uma forma fechada. Embora a resolução analítica dê uma solução exata, muitas vezes isto não é possível pelo grau de dificuldade em que estas equações diferenciais se apresentam.

É necessário recorrer forçosamente aos "métodos numéricos" que apresentam soluções aproximadas.

5.2 - APLICAÇÃO DO MÉTODO AO PROBLEMA

Uma das condições para a aplicação do método de Ritz é que as funções de aproximação escolhidas satisfaçam as condições de contorno geométricas. Para que haja uma generalização do problema é necessário colocá-lo em uma forma adimensional. Fazendo:

$$\chi = \frac{z}{L} \quad , \quad \chi_p = \frac{z_p}{L} \quad (5.1)$$

$$\psi = \frac{u}{L} \quad \therefore \quad u = \psi \cdot L \quad (5.2)$$

$$v = \frac{v}{L} \quad \therefore \quad v = v \cdot L \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{1}{L} \quad \therefore$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{1}{L} \quad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \chi} = \psi_{\chi} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \psi_X}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{L} \psi_{XX} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{L} \quad \therefore \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial X} = v_X \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial v_X}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{L} v_{XX} \quad (5.7)$$

$\theta = j\tilde{a}$ é adimensional (rd)

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{L} \theta_X \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{1}{L^2} \theta_{XX} \quad (5.9)$$

$$z = X \cdot L \quad 0 \leq z \leq L$$

$$dz = L dX \quad 0 \leq x \leq 1$$

Substituindo as expressões acima em (4.12) vem:

$$\begin{aligned} L = & \int_0^1 \left[\frac{m}{2} \omega^2 (\psi L)^2 + \frac{m}{2} K^2 \omega^2 (\theta)^2 + m e \omega^2 (\psi L) (\theta) + \frac{m}{2} \omega^2 (v L)^2 \right] L dX - \\ & - \int_0^1 \left[\frac{EI_Y}{2} \left(\frac{1}{L} \psi_{XX} \right)^2 + \frac{EI_X}{2} \left(\frac{1}{L} v_{XX} \right)^2 + \frac{GC_T}{2} \left(\frac{1}{L} \theta_X \right)^2 + \frac{EC_W}{2} \left(\frac{1}{L^2} \theta_{XX} \right)^2 \right] L dX - \\ & - \frac{1}{2} K_1 \theta^2 \Big|_{X=1} + \frac{N}{2} \int_0^1 \left[(\psi_X)^2 + (v_X)^2 + e (\psi_X) \left(\frac{1}{L} \theta_X \right) + e^2 \left(\frac{1}{L} \theta_X \right)^2 \right] L dX + \\ & + (P-T) (v L) \Big|_{X=X_p} + (P-T) \int_0^{X_p} (1-X_p) \left(\frac{1}{L} \psi_{XX} \right) (\theta) X L^2 dX + (P-T) \int_{X_p}^1 X_p \cdot \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{L} \psi_{XX}\right)(\theta)(1-X)L^2 dX + (Pa - Tb) \frac{\theta^2}{2} \Big|_{X_p} - T(\theta)(\psi L) \Big|_{X_p} \quad (5.10)$$

multiplicando tudo por $\frac{2L}{\sqrt{EI_y GC_T}}$, resulta:

$$\begin{aligned} L = & \int_0^1 \left[\frac{m\omega^2 L^4}{\sqrt{GC_T EI_y}} (\psi)^2 + \frac{mK^2 \omega^2 L^2}{\sqrt{GC_T EI_y}} (\theta)^2 + \frac{2me\omega^2 L^3}{\sqrt{GC_T EI_y}} (\psi)(\theta) + \right. \\ & \left. + \frac{m\omega^2 L^4}{\sqrt{GC_T EI_y}} (v)^2 \right] dX - \int_0^1 \left[\sqrt{\frac{EI_y}{GC_T}} (\psi_{XX})^2 + \frac{EI_x}{\sqrt{EI_y GC_T}} (v_{XX})^2 + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{GC_T}{EI_y}} (\theta_X)^2 + \frac{EC_w}{L^2 \sqrt{GC_T EI_y}} (\theta_{XX})^2 \right] dX - \left(\frac{K_1 L}{\sqrt{GC_T EI_y}} (\theta)^2 \right) \Big|_{X=1} + \\ & + \left(\frac{T_o L^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} \left[\frac{z_p(b-a) + aL}{ab} \right] \right) \int_0^1 \left[(\psi_X)^2 + (v_X)^2 + 2\left(\frac{e}{L}\right) (\psi_X)(\theta_X) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{e}{L}\right)^2 (\theta_X)^2 \right] dX + \left[\frac{2PL^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} - \frac{2T_o L^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} \left(\frac{(b+a)\bar{h}}{ab} \right) \right] \int_0^{z_p} (1-X_p) \cdot \\ & \cdot (\psi_{XX})(\theta) X dX + \left[\frac{2PL^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} - \frac{2T_o L^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} \left(\frac{(b+a)\bar{h}}{ab} \right) \right] \int_{X_p}^1 (\psi_{XX})(\theta) \cdot \\ & \cdot (1-X) dX + \left[\frac{P \cdot a \cdot L}{\sqrt{EI_y GC_T}} - \frac{T_o L^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} \left(\frac{b}{L} \right) \left(\frac{(b+a)\bar{h}}{ab} \right) \right] \theta^2 \Big|_{X=X_p} - \frac{2T_o L^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{(b+a)\bar{h}}{ab} \right] (\theta)(\psi) \Big|_{X=X_p} + (P-T) \frac{2L^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} (v) \Big|_{X=X_p} \quad (5.11) \end{aligned}$$

Chamando:

$$\Omega^2 = \frac{m\omega^2 L^4}{\sqrt{EI_y GC_T}} \quad \gamma = \sqrt{\frac{GC_T}{EI_y}} \quad K = \frac{L}{\sqrt{EI_y GC_T}}$$

$$\sigma = \frac{T_o L^2}{\sqrt{EI_y GC_T}} \quad \Gamma = \frac{EC_w}{L^2 \sqrt{EI_y GC_T}} \quad \bar{P} = \frac{2PL^2}{\sqrt{GC_T EI_y}}$$

$$CK = 2 \left[\frac{(b+a)h}{ab} \right] \quad D = \left[\frac{z_p (b-a) + aL}{ab} \right] \quad \mathcal{H} = \frac{EI_x}{\sqrt{EI_y GC_T}}$$

e substituindo em (5.11), resulta:

$$\begin{aligned} L = & \int_0^1 \Omega^2 \left[(\psi)^2 + \left(\frac{K}{L}\right)^2 (\theta)^2 + 2\left(\frac{e}{L}\right) (\psi)(\theta) + (v)^2 \right] dX - \int_0^1 \left[\frac{1}{Y} (\psi_{XX})^2 + \right. \\ & \left. + \gamma (\theta_X)^2 + \Gamma (\theta_{XX})^2 + \mathcal{H} (v_{XX})^2 \right] dX - K_1 K \theta^2 \Big|_{X=1} + \int_0^1 \sigma \cdot D \left[(\psi_X)^2 + \right. \\ & \left. + 2\left(\frac{e}{L}\right) (\psi_X)(\theta_X) + \left(\frac{e}{L}\right)^2 (\theta_X)^2 + (v_X)^2 \right] dX + (1-X_p)(\bar{P} - \sigma \cdot c_k) \cdot \\ & \cdot \int_0^{X_p} (\psi_{XX})(\theta) X dX + X_p (\bar{P} - \sigma \cdot c_k) \int_{X_p}^1 (\psi_{XX})(\theta)(1-X) dX + \\ & + \left[\left(\frac{\bar{P}}{2}\right) \left(\frac{a}{L}\right) - \left(\frac{\sigma}{2}\right) (c_k) \left(\frac{b}{L}\right) \right] \theta^2 \Big|_{X=X_p} - (\sigma \cdot c_k) (\theta)(\psi) \Big|_{X=X_p} + \\ & + (\bar{P} - \sigma \cdot c_k) (v) \Big|_{X=X_p} \end{aligned} \quad (5.12)$$

E, fazendo-se o mesmo caminhamento em (4.13), chega-se a:

$$\begin{aligned} L = & \int_0^1 \Omega^2 \left[(\psi)^2 + \left(\frac{K}{L}\right)^2 (\theta)^2 + 2\left(\frac{e}{L}\right) (\psi)(\theta) + (v)^2 \right] dX - \int_0^1 \left[\frac{1}{Y} (\psi_{XX})^2 + \right. \\ & \left. + \gamma (\theta_X)^2 + \Gamma (\theta_{XX})^2 + \mathcal{H} (v_{XX})^2 \right] dX - K_1 K \theta^2 \Big|_{X=1} - K_2 K \left[\left(\frac{L}{h}\right)^2 (\psi)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2L}{h} + \frac{2bL}{h^2}\right) (\psi)(\theta) + \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2 (\theta)^2 \right] \Big|_{X=X_p} + \int_0^1 \sigma \cdot D \left[(\psi_X)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{e}{L} \right) (\psi_X) (\theta_X) + \left(\frac{e}{L} \right)^2 (\theta_X)^2 + (v_X)^2 \Big] dX + (1 - X_p) \int_0^{X_p} \bar{P}(\psi_{XX}) (\theta) X dX + \\
& + X_p \int_{X_p}^1 \bar{P}(\psi_{XX}) (\theta) (1 - X) dX + \left. \frac{\bar{P}}{2} \left(\frac{a}{L} \right) (\theta)^2 \right|_{X=X_p} + \left. \bar{P}(v) \right|_{X=X_p} + \sigma \cdot c_k \left[\left(\frac{L}{2h} \right) (\psi)^2 + \right. \\
& \left. + \left(\frac{b}{h} \right) (\psi) (\theta) + \left(\frac{b^2}{2hL} + \frac{b}{2L} \right) \theta^2 \right] \Big|_{X=X_p} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Na escolha das funções de aproximação ver Apêndice VII, 7.3

A representação das funções de aproximação para deslocamentos quando $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ (Fig. 4.1.a) é:

FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

$$\psi = \sum_{n=1}^N \alpha_n \text{ sen } n\pi X \quad (5.14)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \beta_n \text{ sen } n\pi X \quad (5.15)$$

Estas expressões satisfazem as condições de contorno em $z = 0$ e $z = L$ que são $\psi(0) = v(0) = 0$ e $\psi(1) = v(1) = 0$ respectivamente.

E, para rotação teremos:

FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

$$\theta = \sum_{n=1}^N \gamma_n \text{ sen } n\pi X \quad (5.16)$$

e que satisfazem as condições de contorno em $z = 0$ e $z = L$ que são $\theta(0) = \theta(1) = 0$.

Derivando as expressões (5.14), (5.15) e (5.16):

$$\psi_X = n\pi \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos n\pi X$$

$$\begin{aligned}
\psi_{XX} &= -(n\pi)^2 \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin n\pi\chi \\
v_{\chi} &= n\pi \sum_{n=1}^N \beta_n \cos n\pi\chi \\
v_{XX} &= -(n\pi) \sum_{n=1}^N \beta_n \sin n\pi\chi \\
\theta_{\chi} &= n\pi \sum_{n=1}^N \gamma_n \cos n\pi\chi \\
\theta_{XX} &= -(n\pi) \sum_{n=1}^N \gamma_n \sin n\pi\chi
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Quando $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ (Fig. 4.1.b) as funções de aproximação para deslocamentos não se alteram.

A função de aproximação para rotação é :

FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

$$\theta = \sum_{n=1}^N \gamma_n \sin (2n-1) \frac{\pi}{2} \chi \tag{5.18}$$

e que derivando obtém-se:

$$\begin{aligned}
\theta_{\chi} &= (2n-1) \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N \gamma_n \cos (2n-1) \frac{\pi}{2} \chi \\
\theta_{XX} &= -[(2n-1) \left(\frac{\pi}{2}\right)]^2 \sum_{n=1}^N \gamma_n \sin (2n-1) \frac{\pi}{2} \chi
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Substituindo-se as expressões (5.14), (5.15), (5.16) (5.17), (5.18) e (5.19) em (4.12) e (4.13) e aplicando a condição (4.11) obtém-se um sistema de equações que pode ser posto sob a forma matricial:

Onde os A_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) são as sub-matrizes da matriz originária da Energia Cinética e é denominada de "Matriz do Movimento" ou "Matriz de Massa".

$$\left(\Omega^2 \begin{bmatrix} A_{11} & & A_{13} \\ & A_{22} & \\ A_{31} & & A_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & & B_{13} \\ & B_{22} & \\ B_{31} & & B_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & & C_{13} \\ & C_{22} & \\ C_{31} & & C_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ V_2 \\ \end{bmatrix}$$

FIGURA (5.1)

B_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) são as sub-matrizes da matriz original do trabalho das forças internas, é denominada de "Matriz de Rigidez".

C_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) são as sub-matrizes da matriz original do trabalho das forças externas, é denominada de "Matriz de Carga", e V_i é denominado "Vetor de Carga".

Atentando-se para o sistema de equações na figura (5.1) nota-se que a equação em β_k é independente das demais que são acopladas entre si (existem termos cruzados, $(u) \cdot (\theta)$) formando um sistema de equações de ordem inferior. Fazendo-se $\omega^2=0$ (critério dinâmico) o que implica em $P = P_{\text{crítico}}$, em β_k chega-se a uma equação estática. Como o conceito de estabilidade é um "conceito dinâmico" esta equação não vai interessar no estudo.

O novo sistema colocado em forma de auto valores será:

$$\begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} = \Omega^2 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \gamma_k \end{bmatrix}$$

Onde Ω^2 é o auto valor procurado e

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} \quad \text{é auto vetor}$$

$$\underline{0} = \underline{B} - \underline{C} \quad (*)$$

Escrevendo de uma forma mais compacta, se tem:

$$\underline{0} \underline{x} = \Omega^2 \underline{A} \underline{x} \quad (5.20)$$

Prê multiplicando por \underline{A}^{-1} vem:

$$\underline{A}^{-1} \underline{0} \underline{x} = \Omega^2 \underline{I} \underline{x} \quad \therefore$$

$$(\underline{A}^{-1} \underline{0} - \Omega^2 \underline{I}) \underline{x} = \underline{0} \quad (5.21)$$

A expressão (5.21) também constitui um problema de autovalores só que colocado sob outra forma, onde \underline{I} é a matriz identidade e $\underline{M} = \underline{A}^{-1} \underline{0}$.

$$(\underline{M} - \Omega^2 \underline{I}) \underline{x} = \underline{0} \quad (5.22)$$

O seguinte resultado é bem conhecido:

- Se \underline{M} é simétrica, então todos os autovalores são reais.

Portanto, de um modo geral temos que:

- Se \underline{M} é simétrica a instabilidade será elástica.
- Se \underline{M} não é simétrica a instabilidade poderá ser dinâmica.

(*) 0 til embaixo da letra indica a notação de matriz.

Em (5.20), fazendo-se $\Omega^2=0$, vem:

$$\underline{B} \underline{x} = \underline{C} \underline{x} \quad (5.23)$$

Isolando-se o parâmetro de carga P em \underline{C} chega-se a:

$$\underline{B} \underline{x} = P \underline{\bar{C}} \underline{x}$$

que constitui um problema de autovalores em P , e cujo resultado serão os $P_{\text{críticos}}$ exatos para cada modo de vibração (ou configuração de equilíbrio de Euler) da estrutura.

O problema do equilíbrio será estudado fazendo-se a variação dos parâmetros \bar{P} e σ e obtendo-se como resposta os autovalores ω^2 que são as frequências de vibração da estrutura sob o já citado estado de carregamento, e quando ω^2 trocar de sinal se atingiu a instabilidade.

A instabilidade dinâmica ocorre quando a primeira frequência de vibração ao quadrado (ω_1^2) for maior que a segunda frequência ao quadrado (ω_2^2), ou seja, $\omega_1^2 > \omega_2^2$, sob um mesmo estado de carregamento.

Portanto:

Se $\omega_1^2 > 0$, com $\omega_1^2 < \omega_2^2$ o sistema é dito estável.

Se $\omega_1^2 < 0$ se dá a instabilidade elástica.

Se $\omega_1^2 > \omega_2^2$ se dá a instabilidade dinâmica

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

6.1 - APLICAÇÃO A UM ESTUDO NÃO LINEAR

ANÁLISE NÃO LINEAR

Para se justificar a apresentação do "Critério da Energia" apresentado em (2.2.2) será desenvolvido um estudo da estabilidade de estruturas do tipo II no qual se aplica o caminhamento apresentado por Thompson^[8] que é baseado nos chamados "coeficientes de estabilidade" e será levado em conta a não linearidade geométrica. As estruturas do tipo II são aquelas nas quais o montante está engastado elasticamente à haste por meio de uma mola de torção de rigidez K_2 e cuja extremidade inferior está impedida de sofrer deslocamentos horizontais como mostra a figura (3.6). Nas extremidades da haste (apoios) está se considerando que existam vínculos do tipo "garfo" impedindo-a de girar livremente, como mostra a figura (1.2).

Para este estudo foram feitas as seguintes hipóteses:

- 1 - Rigidez à flexão no plano vertical (YOZ) infinitamente grande.
- 2 - Haste incompressível e há interação entre os esforços axial e de flexão.

3 - Estrutura sujeita a grandes rotações.

4 - O material obedece à lei de Hooke (material elástico).

A função "Energia Potencial Total" apresentada em (3.67) não poderá ser usada em virtude de apresentar somente os termos lineares. É necessário se fazer a dedução dos termos não lineares, apresentados a seguir: A curvatura da fibra neutra da haste é dada por:

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dz} \quad (6.1)$$

A energia de deformação devido à flexão será:

$$V = \int_0^L \frac{EI_y}{2} \chi^2 dz \quad (6.2)$$

Expressando χ em função do deslocamento u , tem-se:

$$\frac{du}{dz} = u_z = \sin \theta \quad \theta = \arcsen \frac{du}{dz} = \arcsen u_z$$

Sabendo-se que:

$$\chi = \frac{d\theta}{dz} = \frac{d}{dz} \arcsen u_z = u_{zz} (1 - u_z^2)^{-1/2}.$$

Substituindo-se em (6.2), tem-se:

$$V = \int_0^L \frac{EI_y}{2} [u_{zz}^2 (1 - u_z^2)^{-1}] dz \quad (6.3)$$

sendo que do desenvolvimento em série de Taylor resulta:

$$(1 - u_z^2)^{-1} = 1 + u_z^2 + u_z^4 + u_z^6 + \dots$$

para se ter a linearização despreza-se $u_z^2 + u_z^4 + u_z^6 + \dots$

O trabalho de N , tendo como hipótese grandes rotações (Ver figura 6.1), será dado por:

$$W_N = N \int_0^L (1 - \cos \theta) dz \quad (6.4)$$

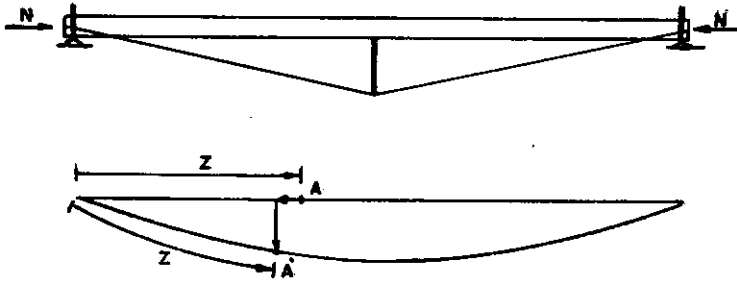


FIGURA (6.1)

Observação: Para pequenas rotações ter-se-ia:

$$W_N = N \int (ds - dz)$$

$$\text{sendo } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - u_z^{*2}} = 1 + \frac{1}{2} u_z^{*2} + \frac{1}{8} u_z^{*4} + \frac{1}{16} u_z^{*6} + \dots \quad (6.5)$$

vem:

$$W_N = N \int_0^b (1 - \sqrt{1 - u_z^{*2}}) dz \quad (6.6)$$

Para se obter a linearização despreza-se

$$\frac{1}{8} u_z^{*4} + \frac{1}{16} u_z^{*6} + \dots$$

Substituindo (6.5) em (6.6) vem:

$$W_N = N \int_0^L \left(\frac{1}{2} u_z^{*2} + \frac{1}{8} u_z^{*4} + \frac{1}{16} u_z^{*6} + \dots \right) dz \quad (6.7)$$

sendo que N é função de T_o , para $z_p = \frac{L}{2}$, vem:

$$N = \frac{T_o L}{a}, \quad T = 2T_o \frac{\bar{h}}{a}, \quad a = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \bar{h}}, \quad \bar{h} = h+b$$

Como em (6.7) a dedução do trabalho de N está referenciada em relação ao centro de gravidade (CG) da seção transversal, é necessário se fazer uma mudança de coordenadas, do centro de gravidade (CG) para o centro de cisalhamento (CC) como mostra a figura (3.7). Tem-se:

$$u^* = u + e \sin \theta \approx u + e\theta$$

$$u_z^* = u_z + e\theta_z \quad (6.8)$$

Substituindo (6.8) em (6.7), obtêm-se:

$$W_N = N \int_0^L \left[\frac{1}{2}(u_z + e\theta_z)^2 + \frac{1}{8}(u_z + e\theta_z)^4 + \frac{1}{16}(u_z + e\theta_z)^6 + \dots \right] dz \quad (6.9)$$

Cabe aqui uma observação: O termo não linear $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$ será adotado como sendo $\sin \theta \approx \theta$ já que para um valor $\theta = 8^\circ$ implica em $\frac{\theta^3}{3!} < 0.4\%$.

Substituindo os termos não lineares (6.3) e (6.9) em (3.67), a função "Energia Potencial Total" ficará assim constituída:

$$\begin{aligned} \Pi(u, \theta, P, T_o) = & \int_0^L \left[\frac{EI_y}{z} (u_{zz}^2 + u_{zz}^2 \cdot u_z^2 + u_{zz}^2 \cdot u_z^4 + \dots) + \frac{GC_T}{2} (\theta_z)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{EC_w}{2} (\theta_{zz})^2 \right] dz \\ & + \frac{K_2}{z} \left[\frac{u^2}{h^2} + \left(\frac{2}{h} + \frac{2b}{h^2} \right) u \cdot \theta + \left(1 + \frac{b}{h} \right)^2 \theta^2 \right] \Bigg|_{z=z_T} = \left(\frac{T_o L}{a} \right) \int_0^L \left[\frac{1}{2} (u_z + e\theta_z)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{8}(u_z + e\theta_z)^4 + \frac{1}{16}(u_z + e\theta_z)^6 + \dots \right] dz - \frac{P}{2} \int_0^{z_p} (u_{zz}) (\theta) (z) dz \\
& - \frac{P}{2} \int_{z_p}^L (u_{zz}) (\theta) (L-z) dz - \frac{Pa}{2} \theta^2 \Big|_{z=z_p} - \tau \left[\frac{1}{2h}(u^2 + 2bu\theta + b^2\theta^2) + \frac{b}{2} \theta^2 \right] \Big|_{z=z_T} \\
& \dots (6.10)
\end{aligned}$$

As funções que satisfazem as condições de contorno para u e θ , e que acompanham a deformada da estrutura, podem ser escritas como sendo funções de aproximação do tipo polinomial, assim:

$$\begin{aligned}
u &= (Z-L) [Q_1 Z + Q_2 Z^2 + \dots] \\
\theta &= (Z-L) [R_1 Z + R_2 Z^2 + \dots] \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Tomando-se a expressão de Π , já adimensionalizada:

$$\begin{aligned}
\Pi(\Psi, \theta, P, T_o) &= \int_0^1 (\Psi_{XX})^2 [1 + \Psi_X^2 + \Psi_X^4 + \dots] dX + \int_0^1 \frac{GC_T}{EI_y} (\theta_X)^2 dX + \\
&+ \int_0^1 \frac{EC_w}{L^2 EI_y} (\theta_{XX})^2 dX + \frac{K_2 L}{EI_y} \left[\frac{L}{h^2} (\Psi)^2 + \left(\frac{2L}{h} + \frac{2bL}{h^2} \right) (\Psi)(\theta) + \left(1 + \frac{b}{h} \right)^2 (\theta)^2 \right] \Big|_{X=X_T} \\
&- \left(\frac{2T_o L^3}{aEI_y} \right) \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (\Psi_X + \frac{e}{L} \theta_X)^2 + \frac{1}{8} (\Psi_X + \frac{e}{L} \theta_X)^4 + \frac{1}{16} (\Psi_X + \frac{e}{L} \theta_X)^6 + \dots \right] dX \\
&- \frac{PL^2}{EI_y} \int_0^{X_p} (\Psi_{XX}) (\theta) (X) dX - \int_{X_p}^1 \frac{PL^2}{EI_y} (\Psi_{XX}) (\theta) (1-X) dX - \frac{PL^2}{EI_y} \left(\frac{a}{L} \right) \theta^2 - \\
&\left(\frac{2T_o L^3}{aEI_y} \right) \left[\frac{\bar{h}}{h} (\Psi)^2 + \frac{2b\bar{h}}{hL} (\Psi)(\theta) + \left(\frac{b^2\bar{h}}{hL^2} + \frac{bh}{L^2} \right) (\theta)^2 \right] \Big|_{X=X_T} \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Sendo

$$\alpha = \frac{GC_T}{EI_y} \quad \beta = \frac{EC_w}{L^2 EI_y} \quad K = \frac{K_2 L}{EI_y} \quad \sigma = \frac{2T_o L^3}{aEI_y} \quad \bar{P} = \frac{PL^2}{EI_y}$$

os parâmetros adimensionais.

Para facilitar as integrações que são trabalhosas faremos com que $Q_2 = R_2 = 0$; mas na necessidade de se obter um estudo pós-crítico mais apurado é conveniente adotar funções com um número maior de graus de liberdade.

Fazendo-se as variações para Ψ e Θ , vem:

$$\Psi = \frac{u}{L} = (\chi-1)(Q_1 \chi)L = (Q_1 \chi^2 - Q_1 \chi)L$$

$$\Psi_{\chi} = (2Q_1 \chi - Q_1)L$$

$$\Psi_{\chi\chi} = 2Q_1 L$$

$$\Theta = (R_1 \chi^2 - R_1 \chi)L^2$$

$$\Theta_{\chi} = (2R_1 \chi - R_1)L^2$$

$$\Theta_{\chi\chi} = 2R_1 L^2 \quad (6.13)$$

Substituindo (6.13) em (6.10) e desprezando-se os termos não lineares de grau maior ou igual a seis, vem:

$$\begin{aligned} \Pi(Q_1, R_1, \bar{P}, \sigma) = & \int_0^1 (2Q_1 L)^2 \left[1 + (2Q_1 \chi - Q_1)^2 L^2 \right] d\chi + \int_0^1 \alpha [(2R_1 \chi - R_1)L^2]^2 d\chi + \\ & + \int_0^1 \beta (2R_1 L^2)^2 d\chi + K \left\{ \left(\frac{L}{h} \right)^2 [(Q_1 \chi^2 - Q_1 \chi)L]^2 + \left(\frac{2L}{h} + \frac{2bL}{h^2} \right) [(Q_1 \chi^2 - Q_1 \chi)L] \cdot \right. \\ & \cdot [(R_1 \chi^2 - R_1 \chi)L^2] + \left(1 + \frac{b}{h} \right)^2 [(R_1 \chi^2 - R_1 \chi)L^2]^2 \} - \sigma \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [(2Q_1 \chi - Q_1)L + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e}{L} (2R_1 X - R_1) L^2 \Big]^2 + \frac{1}{8} \left[(2Q_1 X - Q_1) L + \frac{e}{L} (2R_1 X - R_1) L^2 \right]^4 + \dots \Big] dX - \\
& - \bar{P} \int_0^{X_p} (2Q_1 L) [(R_1 X^2 - R_1 X) L^2] X dX - \bar{P} \int_{X_p}^1 (2Q_1 L) [(R_1 X^2 - R_1 X) L^2] (1-X) dX \\
& - \bar{P} \left(\frac{a}{L} \right) [(R_1 X^2 - R_1 X) L^2]^2 - \sigma \left\{ \left(\frac{\bar{h}}{h} \right) [(Q_1 X^2 - Q_1 X) L]^2 + \right. \\
& + \left(\frac{2b\bar{h}}{hL} \right) [(Q_1 X^2 - Q_1 X) L] \cdot [(R_1 X^2 - R_1 X) L^2] + \left(\frac{b^2 \bar{h}}{hL^2} + \frac{b\bar{h}}{L^2} \right) [(R_1 X^2 - R_1 X) L^2]^2 \Big\} \\
& \dots \dots \dots (6.14)
\end{aligned}$$

Adotando-se uma haste com seção transversal simétrica em relação aos dois eixos principais resulta $e=0$. Suponhamos que a sollicitação externa esteja aplicada no ponto de intersecção entre a haste e o montante e que, para efeito de simplificação, será considerada no meio do vão, então $X_p = \frac{1}{2}$.

Efetuando-se as integrações em (6.14), resulta:

$$\begin{aligned}
\Pi(Q_1, R_1, \bar{P}, \sigma) &= (2Q_1 L)^2 + \frac{4}{3} (Q_1 L)^4 + \frac{\alpha}{3} R_1^2 L^4 + \beta (2R_1 L^2)^2 + K \left(\frac{L^2}{h^2} \right) \left(\frac{Q_1^2 L^2}{16} \right) \\
&+ K \left(\frac{2L}{h} + \frac{2bL}{h^2} \right) \left(\frac{R_1 Q_1 L^3}{16} \right) + K \left(1 + \frac{b}{h} \right)^2 \left(\frac{R_1^2 L^4}{16} \right) - \frac{\sigma}{6} (Q_1 L)^2 - \frac{\sigma}{40} (Q_1 L)^4 \\
&- \bar{P} (2Q_1 R_1 L^3) \left(-\frac{5}{192} \right) - \bar{P} (2Q_1 R_1 L^3) \left[-\frac{1}{12} + \frac{11}{192} \right] - \bar{P} \left(\frac{a}{L} \right) \left(\frac{R_1^2 L^4}{16} \right) - \\
&- \sigma \left[\left(\frac{\bar{h}}{h} \right) \left(\frac{Q_1^2 L^2}{16} \right) + \left(\frac{2b\bar{h}}{hL} \right) \left(\frac{Q_1 R_1 L^3}{16} \right) + \left(\frac{b^2 \bar{h}}{hL^2} + \frac{b\bar{h}}{L^2} \right) \left(\frac{R_1^2 L^4}{16} \right) \right] \quad (6.15)
\end{aligned}$$

Chamando:

$$C_1 = \left(\frac{L}{h}\right)^2 \quad C_2 = \left(\frac{2L}{h} + \frac{2bL}{h^2}\right)$$

$$C_3 = \left(1 + \frac{b}{h}\right)^2 \quad T_1 = \left(\frac{\bar{h}}{h}\right)$$

$$T_2 = \left(\frac{2b\bar{h}}{hL}\right) \quad T_3 = \left(\frac{b^2\bar{h}}{hL^2} + \frac{b\bar{h}}{L^2}\right)$$

$$A = L^2 \left(4 + \frac{KC_1}{16} - \frac{\sigma}{6} - \frac{\sigma T_1}{16}\right)$$

$$B = L^3 \left(\frac{KC_2}{16} + \frac{20\bar{P}}{192} - \frac{\sigma T_2}{16}\right)$$

$$C = L^4 \left[\frac{\alpha}{3} + 4\beta + \frac{KC_3}{16} - \frac{\bar{P}}{16} \left(\frac{a}{L}\right) - \frac{\sigma T_3}{16}\right]$$

$$D = \left(\frac{4}{3} - \frac{\sigma}{40}\right) L^4$$

Substituindo em (6.15), resulta:

$$\Pi(Q_1, R_1, \bar{P}, \sigma) = A Q_1^2 + B Q_1 R_1 + C R_1^2 + D Q_1^4 \quad (6.16)$$

De (6.16):

$$\Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = 2A Q_1 + B R_1 + 4D Q_1^3 \quad ; \quad \Pi_{11} = 2A + 12D Q_1^2$$

$$\Pi_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial R_1} = B Q_1 + 2C R_1 \quad ; \quad \Pi_{22} = 2C$$

$$\Pi_{12} = \Pi_{21} = B$$

Nota-se que para $Q_1 = R_1 = 0$,

$$\Pi(0, 0, \bar{P}, \sigma) = 0 \quad ,$$

ou seja, o sistema admite solução trivial e mais, o caminho fun

damental ou caminho primário coincide com o eixo de \bar{P} ou de σ . Deve-se lembrar que se está fixando um parâmetro de carga e variando o outro. Para o exemplo fixaremos σ .

Baseando-se no sinal dos termos da diagonal principal e dos menores principais, pode-se discutir a estabilidade de do sistema através da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Para que haja um ponto de extremo (máximo ou mínimo) deve-se ter as condições:

$$\Pi_1 = 0 \quad (6.18)$$

$$\Pi_2 = 0 \quad (6.19)$$

Estas condições são provenientes do Teorema de Lagrange e que é uma condição de estacionaridade da Função Energia Potencial Total.

Para que haja um "ponto de mínimo" é suficiente que (6.17) seja positiva definida, donde tem-se que ter:

$$\Pi_{11} > 0$$

$$\Pi_{22} > 0$$

$$\Pi_{11} \cdot \Pi_{22} - \Pi_{21}^2 > 0 \quad (6.20)$$

são condições de um ponto estável.

Para que haja um "ponto de máximo", é suficiente

que (6.17) seja negativa definida, donde tem-se que ter:

$$\Pi_{11} < 0$$

$$\Pi_{22} < 0$$

$$\Pi_{11} \cdot \Pi_{22} - \Pi_{12}^2 < 0 \quad (6.21)$$

são condições de um ponto instável.

Se houver "ponto de inflexão", a matriz (6.17) torna-se indefinida podendo assumir qualquer valor.

A condição para que haja um "ponto crítico" é :

$$\Pi_{11} \geq 0$$

$$\Pi_{22} \geq 0$$

$$\Pi_{11} \cdot \Pi_{22} - \Pi_{12}^2 \geq 0 \quad (6.22)$$

ou pelo menos uma das igualdades verificadas. A condição (6.22) é geral e nota-se que o ponto de mínimo está incluído.

Pode-se assim estabelecer a carga crítica através da seguinte condição:

$$\Pi_{11} \cdot \Pi_{22} - \Pi_{12}^2 = 0 \quad , \text{ donde}$$

$$(2A + 12DQ_1^2)(2C) - B^2 = 0$$

$$(4A + 24DQ_1^2) = \frac{B^2}{C} \quad (6.23)$$

Desenvolvendo-se, chega-se a:

$$(4A + 24DQ_1^2) = \frac{L^2 \left(F + \frac{\bar{P}}{9,6}\right)^2}{\left[H - \frac{\bar{P}}{16} \left(\frac{a}{L}\right)\right]} \quad (6.24)$$

onde:

$$F = \frac{KC_2}{16} - \frac{\sigma T_2}{16}$$

$$H = \frac{\alpha}{3} + 4\beta + \frac{KC_3}{16} - \frac{\sigma T_3}{16}$$

Para facilitar, suponhamos que \bar{P} esteja aplicada no centro de cisalhamento da seção transversal da haste, o que implica em $\frac{a}{L} = 0$; portanto, substituindo em (6.24), resulta:

$$(4A + 24DQ_1^2) = \frac{L^2 \left(F + \frac{\bar{P}^c}{9,6}\right)^2}{H} \quad \text{ou}$$

$$\bar{P}^c = 9,6 \frac{\sqrt{(4A + 24DQ_1^2)H}}{L} - F \quad (6.24)$$

Substituindo-se os valores de A,D,H,F em (6.24) obtêm-se a fórmula para \bar{P} crítico:

$$\bar{P}^c = 19,2 \sqrt{\left[\left(4 + \frac{KC_1}{16} - \frac{\sigma T_1}{16}\right) + \left(8 - \frac{3}{20}\sigma\right)L^2Q_1^2\right] \cdot \left[\frac{\alpha}{3} + 4\beta + \frac{KC_3}{16} - \frac{\sigma T_3}{16}\right]} - \frac{KC_2}{16} + \frac{\sigma T_2}{16} \quad (6.25)$$

O ponto crítico se situa na intersecção do caminho primário com o caminho secundário. Como o caminho primário coincide com um dos eixos, resulta, como já foi dito, em $Q_1 = R_1 = 0$ e o termo $-\frac{3}{20}\sigma \cdot L^2Q_1^2$ desaparecerá de (6.25).

Para se fazer o estudo do tipo de bifurcação que a estrutura apresenta é necessário se fazer uma diagonalização e cujo esquema geral é:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha u_1 + \beta u_2 \\ R_1 &= \gamma u_1 + \delta u_2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Substituindo (6.26) na forma quadrática

$$A Q_1^2 + B Q_1 R_1 + C R_1^2$$

resulta:

$$\begin{aligned} &A(\alpha^2 u_1^2 + \beta u_2^2 + 2\alpha\beta u_1 u_2) + B[\alpha\gamma u_1^2 + \beta\delta u_2^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma) u_1 u_2] + \\ &+ C[\gamma^2 u_1^2 + \delta^2 u_2^2 + 2\gamma\delta u_1 u_2] \end{aligned}$$

para se anular os termos quadráticos em $u_1 u_2$ é preciso que:

$$u_1 u_2 [2\alpha\beta A + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2\gamma\delta C] = 0$$

fazendo

$$\beta = \gamma = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = -\delta = -\left(\frac{2C}{B}\right)$$

obtém-se a seguinte transformação diagonalizante:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{2C}{B}\right) & 1 \\ 1 & \left(\frac{2C}{B}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Aplicando (6.27) em (6.16), resulta:

$$\begin{aligned} D(u_1, u_2, \bar{P}, \sigma) &= A \left[-\left(\frac{2C}{B}\right) u_1 + u_2 \right]^2 + B \left[-\left(\frac{2C}{B}\right) u_1 + u_2 \right] \cdot \left[u_1 + \left(\frac{2C}{B}\right) u_2 \right] + \\ &+ C \left[u_1 + \left(\frac{2C}{B}\right) u_2 \right]^2 + D \left[-\left(\frac{2C}{B}\right) u_1 + u_2 \right]^4 \end{aligned} \quad (6.28)$$

De (6.23), temos $AC \neq \frac{B^2}{4}$ já que $Q_1=0$ no ponto crítico, e que substituindo em (6.28) resulta:

$$D(u_1, u_2, \bar{P}, \sigma) = \left[A \left(\frac{2C}{B} \right)^2 - B \left(\frac{2C}{B} \right) + C \right] u_1^2 + \left[A + \left(\frac{2C}{B} \right) B + \left(\frac{2C}{B} \right)^2 \right] u_2^2 + D \left[- \left(\frac{2C}{B} \right) u_1 + u_2 \right]^4 \quad (6.29)$$

mas como ainda $AC = \frac{B^2}{4}$, substituindo em (6.29), resulta:

$$D(u_1, u_2, \bar{P}, \sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left[A + \left(\frac{2C}{B} \right) B + \left(\frac{2C}{B} \right)^2 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} + D \left[- \left(\frac{2C}{B} \right) u_1 + u_2 \right]^4 \quad \dots \quad (6.30)$$

Percebe-se pela análise de (6.30) que a coordenada principal independente será u_1 e que na forma paramétrica tem-se:

$$u_1 = u(u_1)$$

$$u_2 = u(u_1)$$

Derivando-se (6.30) em relação a u_1 , vem:

$$D_1 = \frac{\partial D}{\partial u_1} = 2 \left[A \left(\frac{2C}{B} \right)^2 - B \left(\frac{2C}{B} \right) + C \right] u_1 + 4D \left[- \left(\frac{2C}{B} \right) u_1 + u_2 \right]^3 \left(- \frac{2C}{B} \right) \quad (6.31)$$

Derivando-se (6.31) em relação ao parâmetro de carga P , obtem-se:

$$B = B(P) \rightarrow B^P = \frac{20}{192} L^2$$

$$C = C(P) \rightarrow C^P = - \left(\frac{a}{16} \right) L^3$$

Da mesma forma, para $u_1=u_2=0$, tem-se:

$$D(0,0,\bar{P},\sigma) = 0$$

Portanto o caminho fundamental coincide com o eixo de \bar{P} .

Avaliando D_1^P no ponto crítico c ($u_1=u_2=0$), vem:

$$D_1^P(c) = 0 \quad (6.32)$$

De (6.32) se conclui que neste tipo de estrutura não aparece o fenômeno "snap through" (configuração invertida).

Derivando (6.31) duas vezes, vem:

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2 \left[A \left(\frac{2C}{B} \right)^2 - B \left(\frac{2C}{B} \right) + C \right] + 12D \left[- \left(\frac{2C}{B} \right) u_1 + u_2 \right]^2 \left(- \frac{2C}{B} \right)^2 \\ D_{111} &= 24D \left[- \left(\frac{2C}{B} \right) u_1 + u_2 \right] \left(- \frac{2C}{B} \right)^3 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Avaliando (6.33) no ponto crítico, vem:

$$D_{111}^c = 0$$

Derivando (6.33) em relação a u_1 , vem:

$$D_{1111}^c = 24D \left(- \frac{2C}{B} \right)^4 \neq 0$$

Usando a transformação (2.35):

$$\bar{D}_{1111}^c = D_{1111}^c - 3 \sum_{s=2}^{s=n} (D_{s11}^c)^2 / D_{ss}^c \quad (s \neq 1) \quad (6.34)$$

$$D_{112} = 24D \left[- \left(\frac{2C}{B} \right) u_1 + u_2 \right] \left(- \frac{2C}{B} \right)^2 \quad (6.35)$$

Avaliando (6.35) no ponto crítico $\rightarrow D_{112}^c = 0$, então de (6.34):

$$\bar{D}_{1111}^c = D_{1111}^c \quad (6.36)$$

Para $D > 0$, obtêm-se:

$D_{1111}^c > 0$ dando portanto bifurcação simétrica estável, como mostra a figura(6.2).

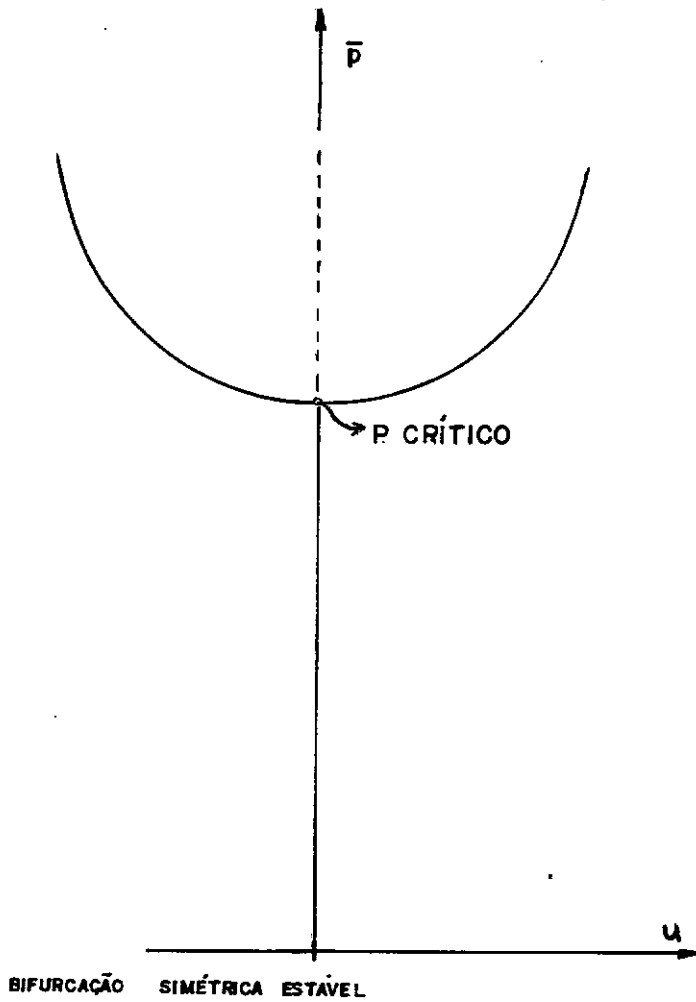


FIGURA (6.2)

APLICAÇÃO NUMÉRICA: Haste com dois garfos nas extremidades e submetida a uma carga transversal P no centro do vão. O ponto de aplicação de P será no centro de torção do perfil.

Dados:

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$G = .81 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$I_x = 16.666667 \text{ cm}^4$$

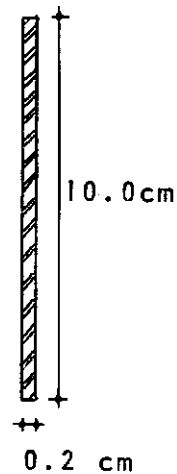
$$I_y = 0.006667 \text{ cm}^4$$

$$C_T = 0.02667 \text{ cm}^4$$

$$C_w = 0.0 \text{ cm}^6$$

$$EY = 0.0 \text{ cm}$$

$$L = 200 \text{ cm}$$



Da referência [2] tem-se:

$$P_{crit} = 16.94 \frac{\sqrt{EI_y \cdot GC_T}}{L^2}$$

e que tem como resultado:

$$P^C = 7,106 \text{ Kgf}$$

Substituindo-se os valores em (6.25), resulta:

$$\bar{P}^C = 19.2 \sqrt{\frac{4}{3} \alpha}$$

sendo:

$$\alpha = \frac{GC_T}{EI_y} = \frac{0.81 \times 10^6 \times 0.02667}{2.1 \times 10^6 \times 0.006667} = 1.5429$$

portanto:

$$\bar{P}^C = 27.532$$

Sabe-se que:

$$\bar{P} = \frac{PL^2}{EI_y} \quad \therefore \quad P = \frac{\bar{P}EI_y}{L^2}$$

então, chega-se a:

$$P = \frac{27.532 \times 2.1 \times 10^6 \times 0.006667}{(200)^2} = 9.637 \text{ Kgf}$$

O resultado obtido se deve ao fato de que a função de aproximação do tipo polinomial além de não convergir rapidamente, foi tomada contendo um único termo.

6.2 - COMENTÁRIOS DOS RESULTADOS

Na confecção dos gráficos usou-se uma estrutura que tivesse as mesmas características em todos eles a fim de que se pudesse fazer uma comparação entre os mesmos.

O perfil retangular (chapa) de $.2 \times 10 \text{ mm}^2$ com as seguintes características:

$$I_x = 16.666667 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 0.006667 \text{ cm}^4$$

$$L = 200 \text{ cm}$$

$$C_w = 0.0 \text{ cm}^6$$

$$C_T = 0.02667 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$G = .81 \times 10^6 \text{ Kgf/cm}^2$$

$$EY = 0.0 \text{ cm}$$

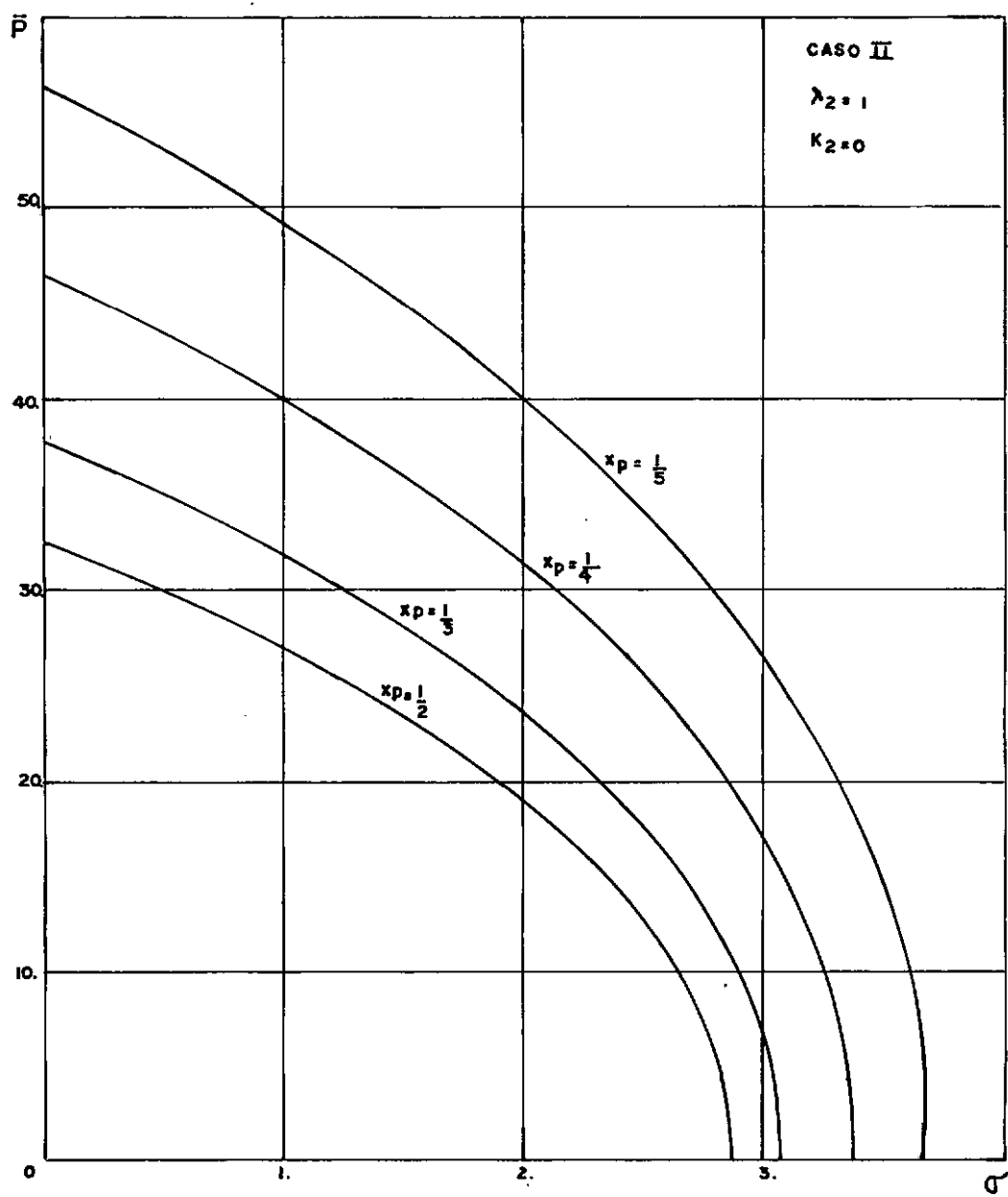


GRÁFICO I

Tem-se a variação de $\bar{P} \times \sigma$ para uma mesma altura do montante em diferentes posições.

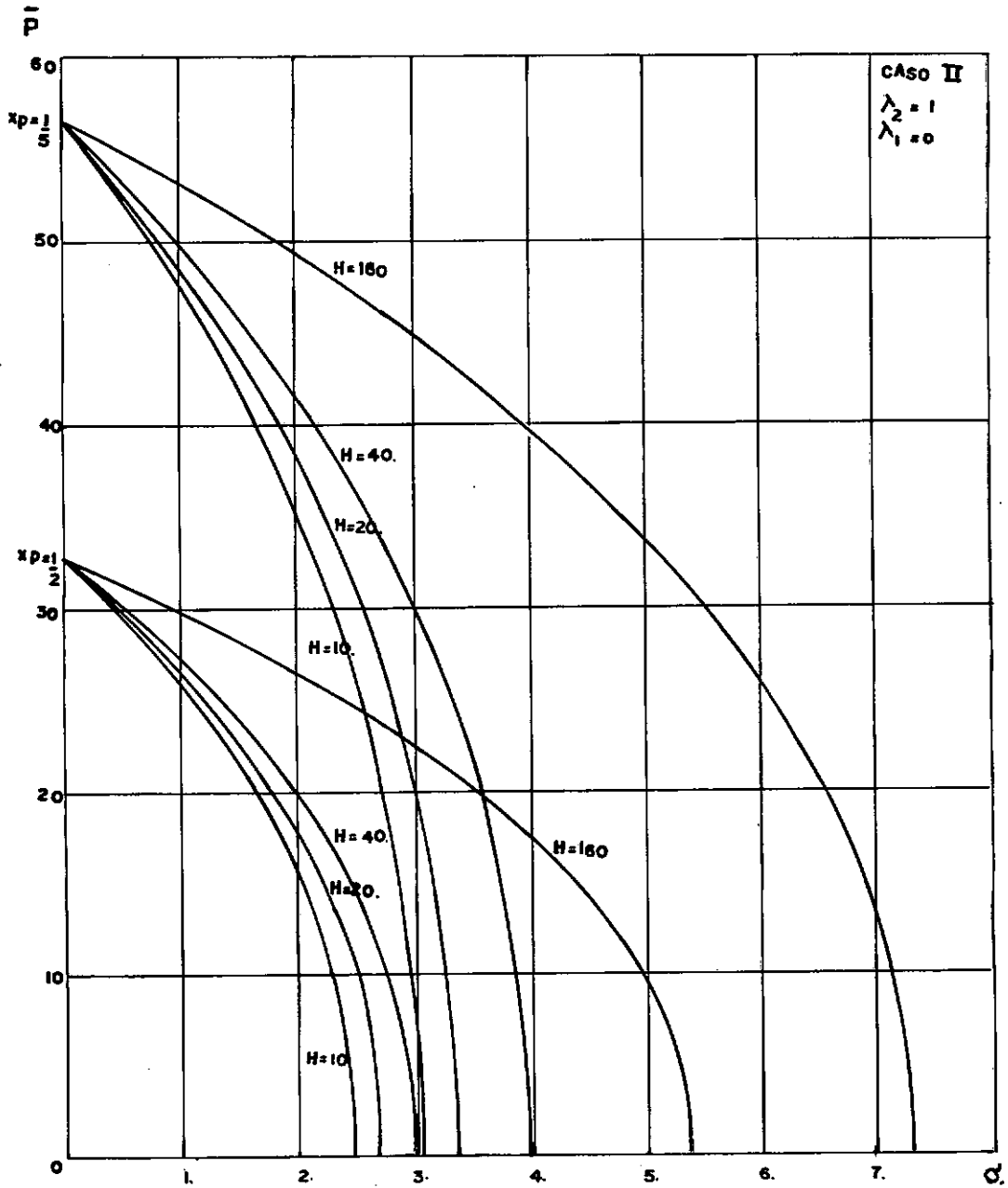


GRÁFICO 2

Tem-se a variação de $\bar{p} \times \sigma$ para diferentes alturas do montante em duas posições: $x_p = \frac{1}{3}$ e $x_p = \frac{1}{2}$ do vão.

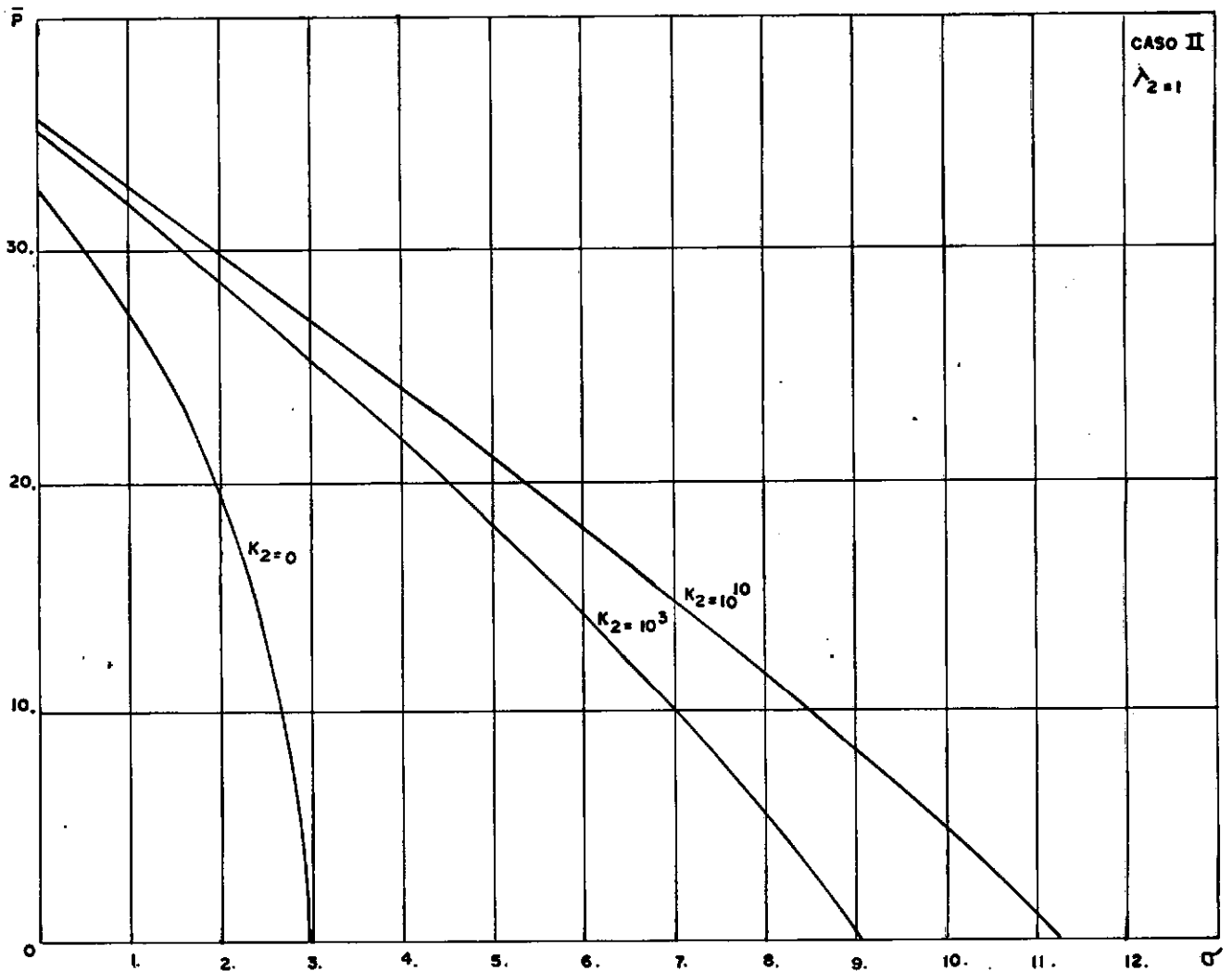


GRÁFICO 3

Mostra a variação de $\bar{P}x\sigma$ para diferentes valores da constante de mola K_2 .

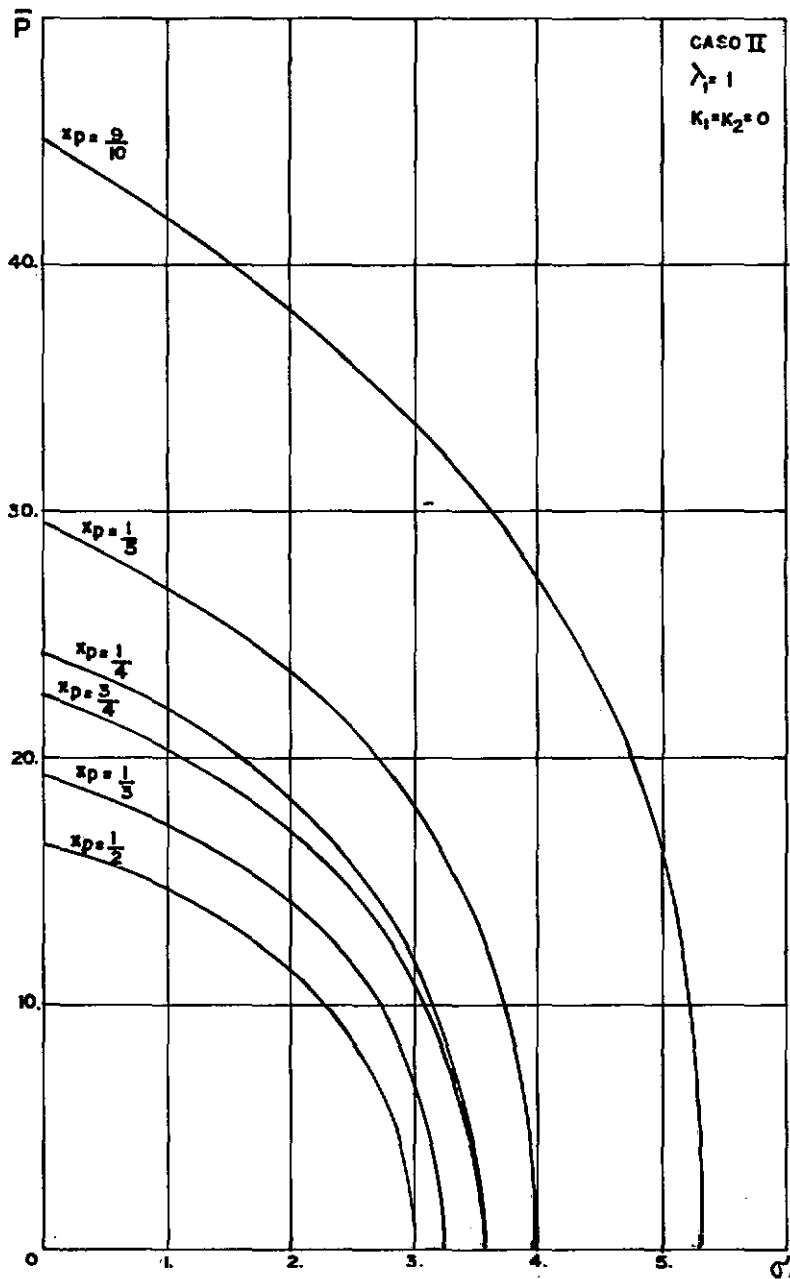


GRÁFICO 4

Mostra a variação de $\bar{P} \times \sigma$ em diferentes posições de \bar{P} ao longo da haste, para $K_1 = K_2 = 0$. Nota-se que $x_p = \frac{3}{4}$ e $x_p = \frac{1}{4}$ são equidistantes dos extremos, mas para $\sigma = 0$ os valores de \bar{P} são diferentes (para \bar{P} a estrutura não é simétrica). Já para $\bar{P} = 0$ os valores de σ são coincidentes, pois há simetria.

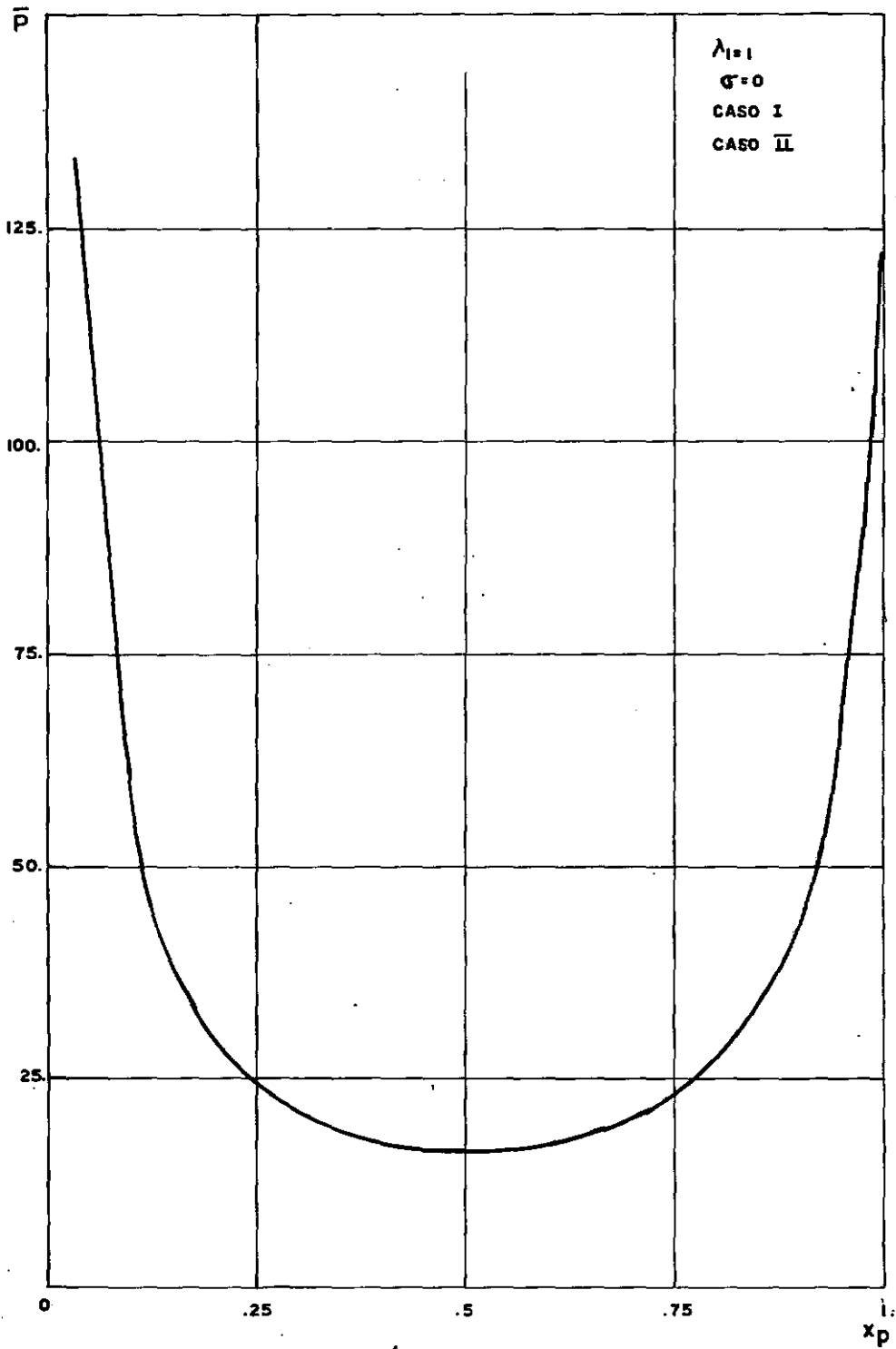
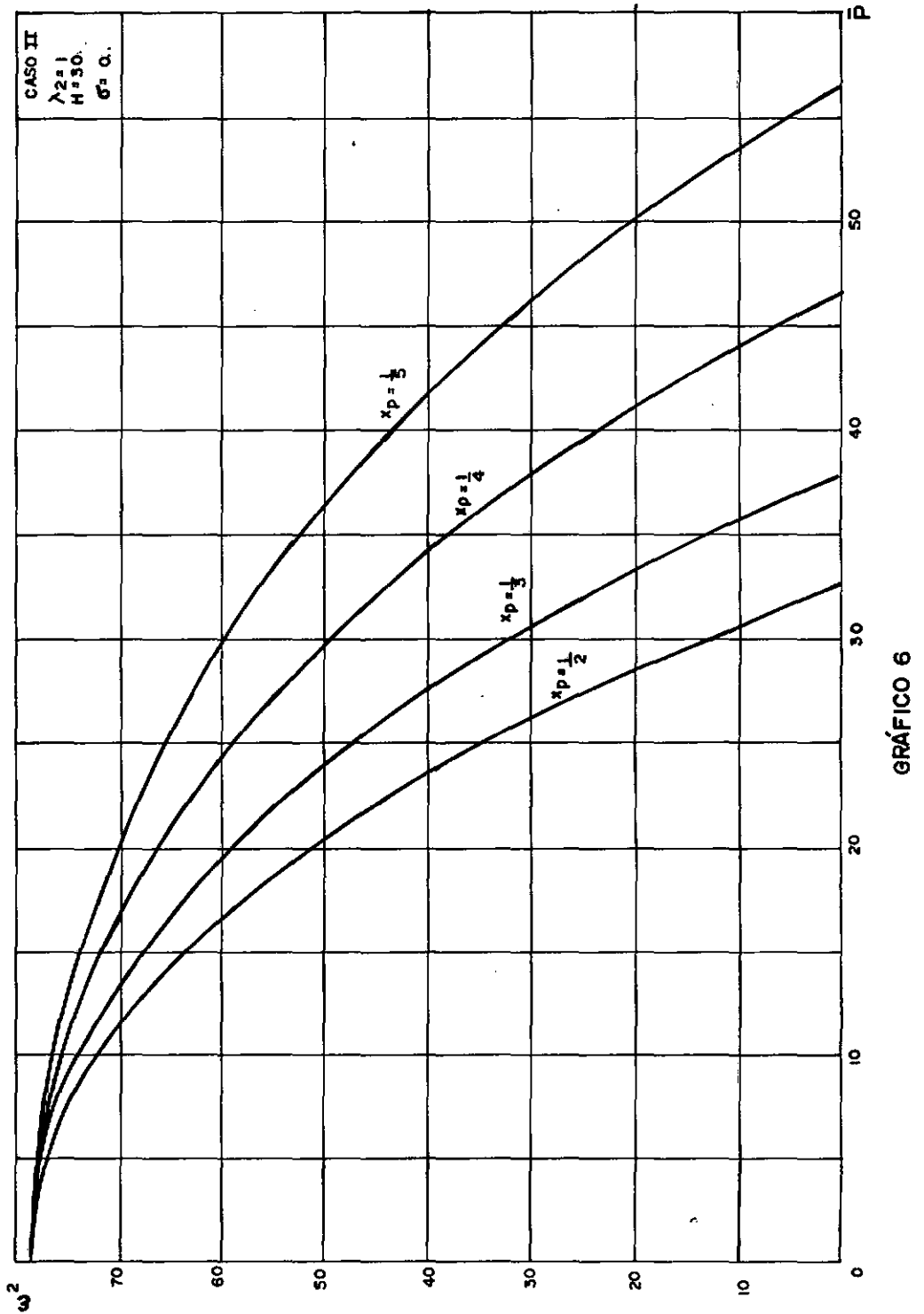
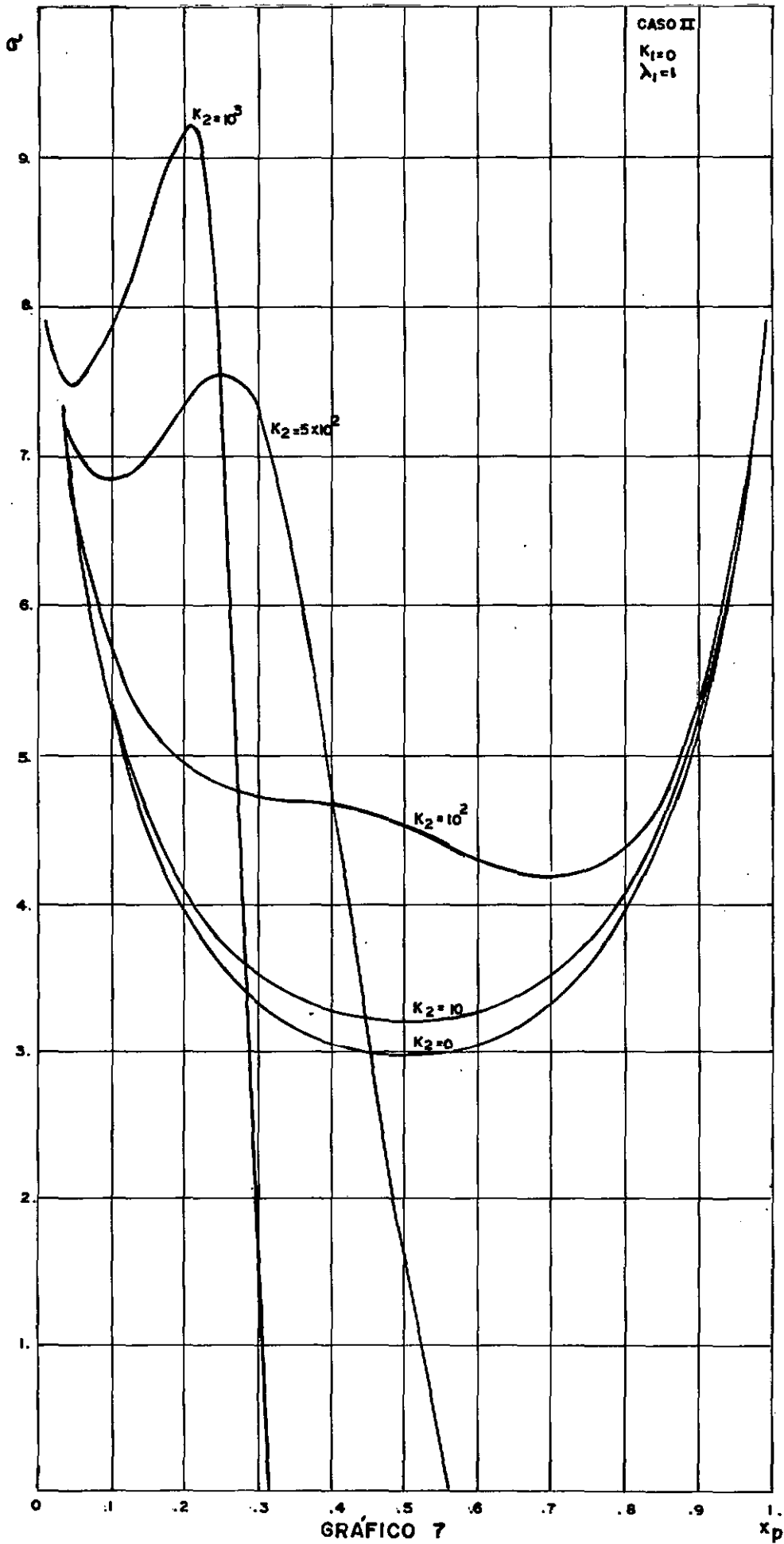


GRÁFICO 5

Neste gráfico tem-se a variação de \bar{P} crítico para $\sigma=0$ ao longo do comprimento da haste. Nota-se que a curva não é simétrica e nas extremidades o valor de \bar{P} tende para ∞ .



Mostra a variação das frequências ao quadrado com o acréscimo da solicitação externa \bar{P} , com $\sigma=0$.



Para um par de valores de K_1 e K_2 a estrutura pode se tornar sensível a qualquer solicitação externa. A rigidez de K_1 será muito importante no estudo da estabilidade da estrutura. Por isso, no gráfico 7 apresenta-se uma limitação da sua utilização fazendo $K_1=0$ (Caso II). Tem-se a variação σ versus \dot{x}_p . Nota-se que com K_2 aumentando, a estabilidade tende a piorar, visto que o perfil impedido de torcer, simplesmente se desloca para a lateral. Para a posição de K_2 se aproximando da extremidade oposta a de K_1 , os valores de σ tendem para infinito.

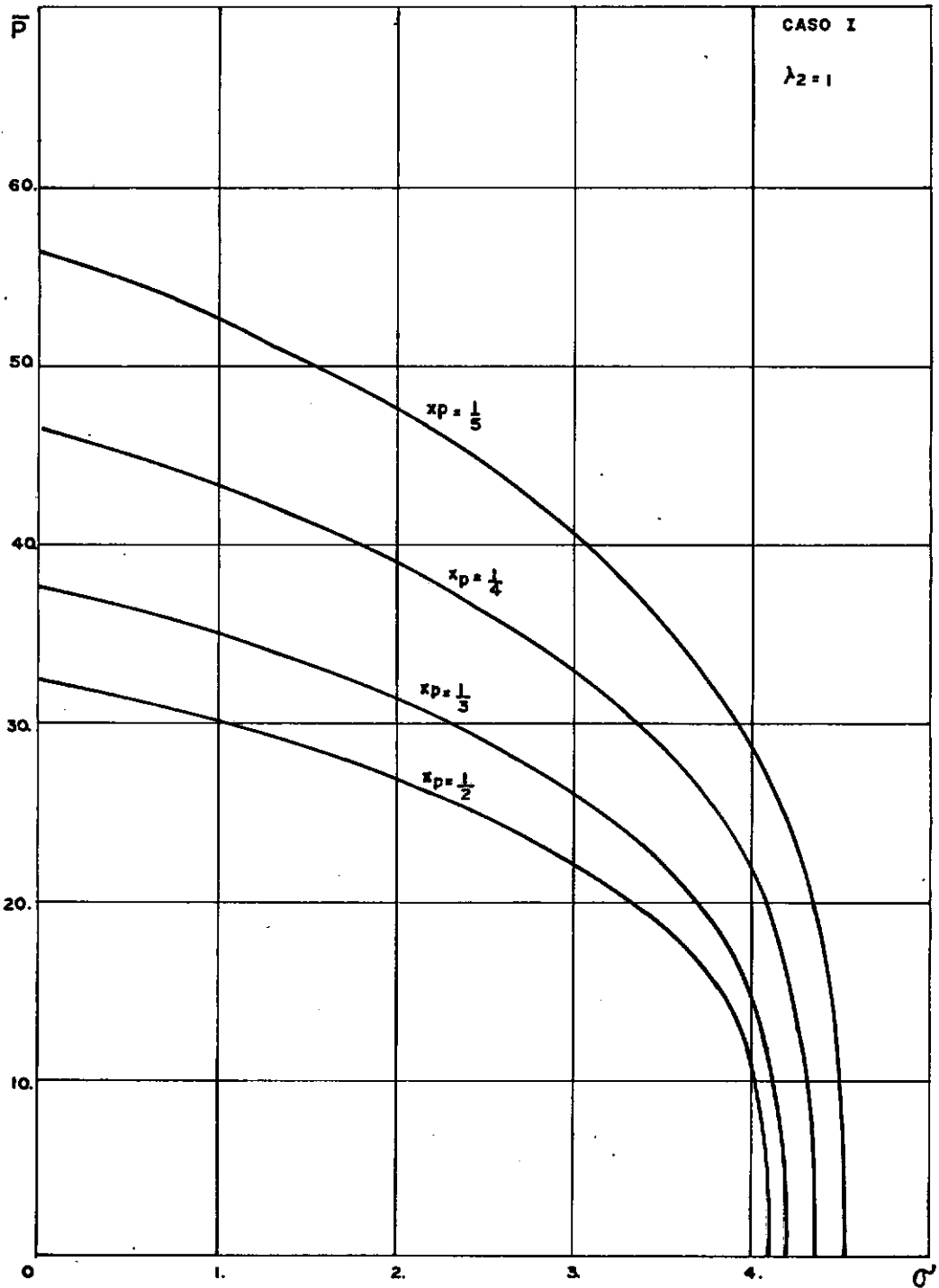


GRÁFICO 8

Tem-se a variação de $\bar{p}x\sigma$ para uma mesma altura do montante em diferentes posições. Em comparação com o gráfico 1 (equivalente) nota-se que admite maiores valores para a relação $\bar{p}x\sigma$.

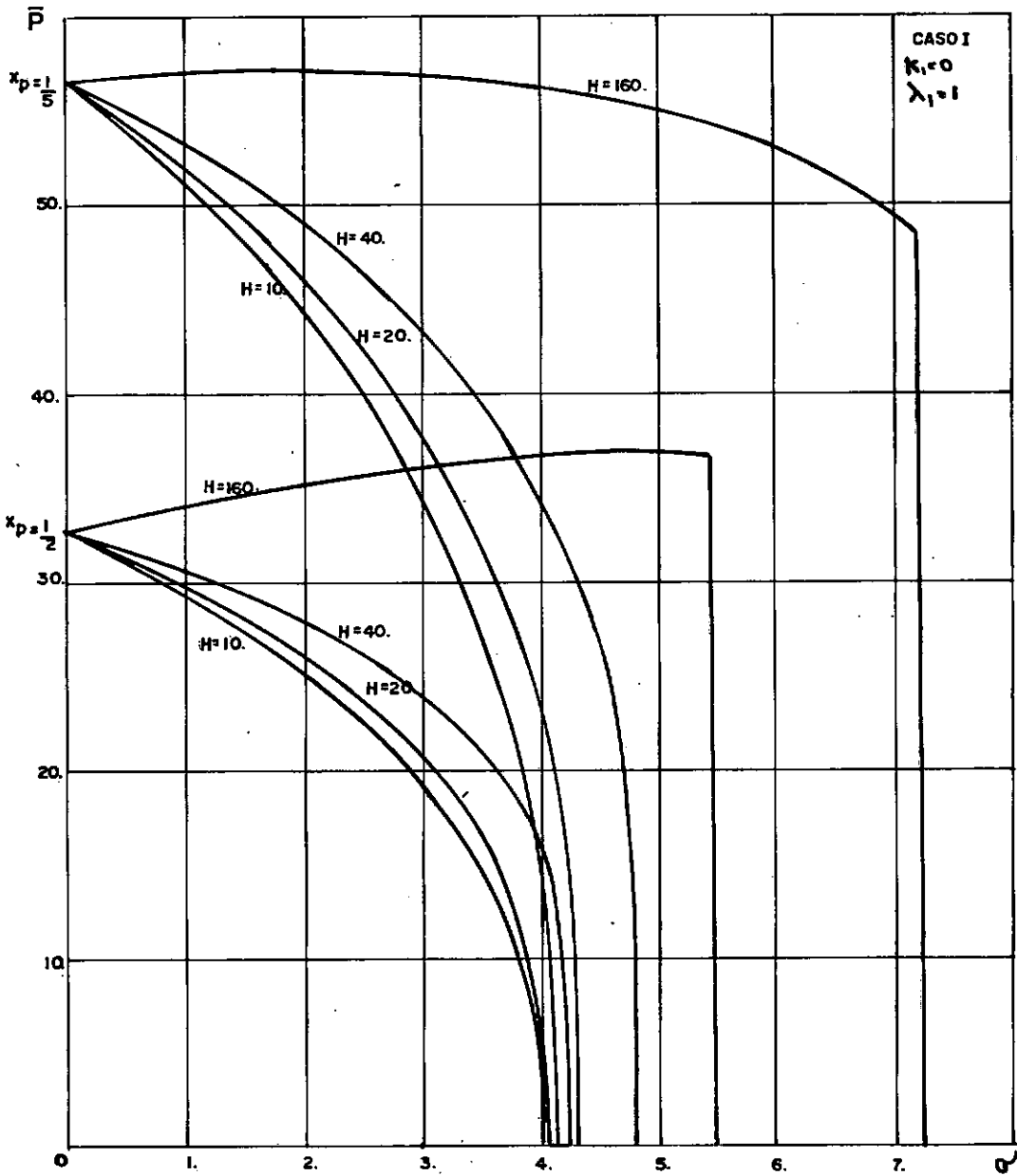


GRÁFICO 9

Tem-se a variação de $\bar{P} \times \sigma$ com diferentes alturas do montante. Em comparação com o gráfico 2, o caso I admite maiores valores para a relação $\bar{P} \times \sigma$. Porém para uma altura do montante considerável, a instabilidade pode ocorrer repentinamente e a queda do parâmetro \bar{P} torna-se brusca.

Ainda, para montantes de grande altura, há um ganho na rigidez da estrutura. O esforço do montante na haste sempre passa pelo centro de torção não produzindo momento de torção como acontece no Caso II. Este momento faz com que o perfil torça atingindo a instabilidade mais rapidamente. Olhando-se para o gráfico, tudo leva a crer que a instabilidade acontece com o perfil sofrendo um "galeio" (movimento brusco de torção).

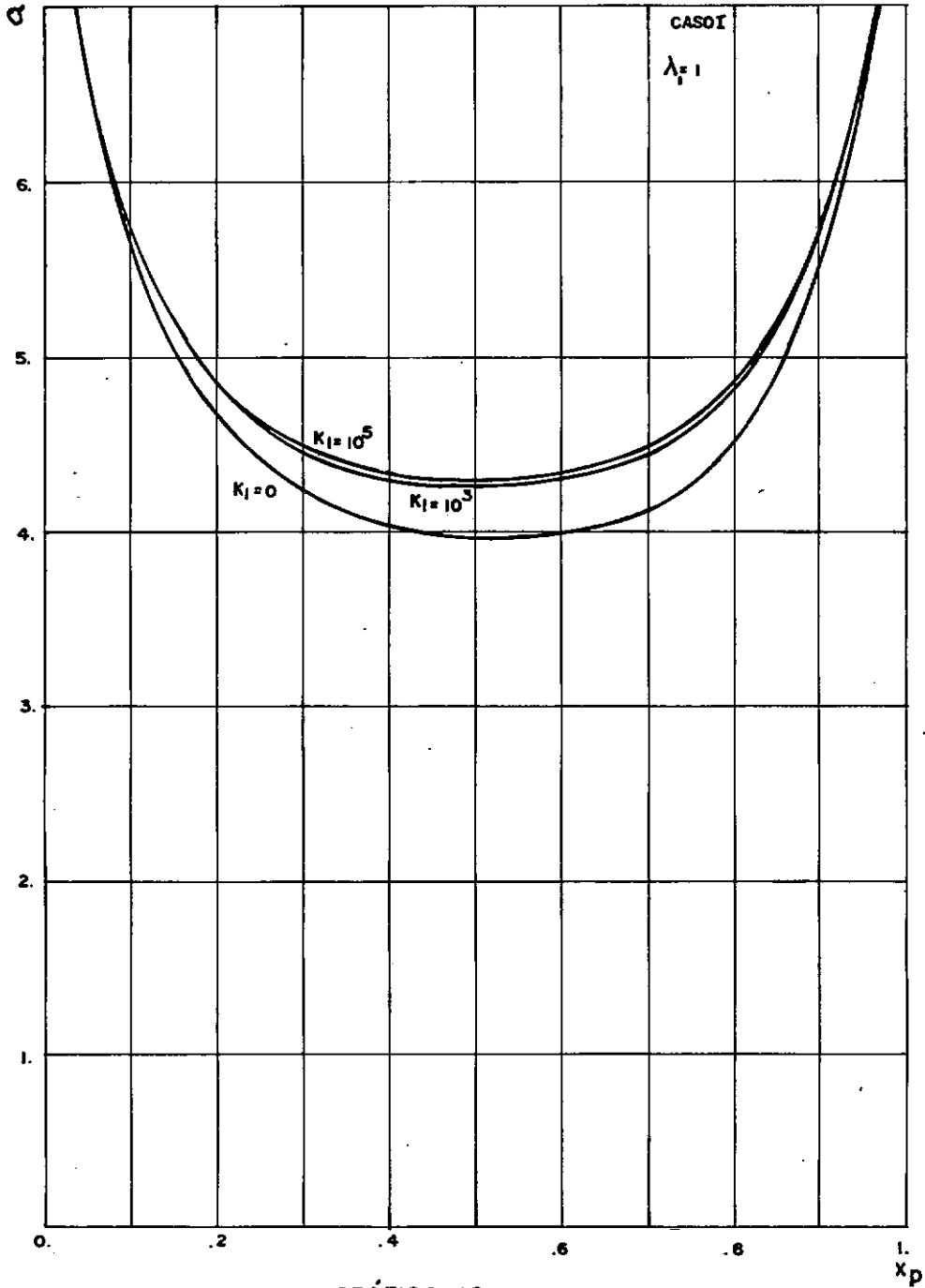


GRÁFICO 10

Mostra a variação de $\sigma \times x_p$ onde se tem para cada curva um valor da constante de mola K_1 , em $x_p = 0$, $x_p = 1$ os valores de σ tendem para infinito.

6.3 - ESTUDO PARAMÉTRICO

Após aplicada a solução (2.69) em (2.62), chega-se a um problema de autovalores na forma de (2.67), sendo

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad [0] = [B] - [C] = \begin{bmatrix} 0_{11} & 0_{12} \\ 0_{21} & 0_{22} \end{bmatrix}$$

ou

$$(-\omega^2[A] - [0]) \{Q(z)\} = \{\emptyset\} \quad (6.37)$$

$\{\emptyset\}$ - vetor nulo

Esta equação leva a valores não triviais de $Q(z)$ somente se:

$$\det(-\omega^2[A] - [0]) = 0 \quad (6.38)$$

Lembramos que $Q(z) \equiv 0$ é solução de (6.37) e que corresponde a uma solução não perturbada. A condição (6.38) é equivalente a:

$$\det \begin{bmatrix} \omega^2 a_{11} + 0_{11} & \omega^2 a_{12} + 0_{12} \\ \omega^2 a_{21} + 0_{21} & \omega^2 a_{22} + 0_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.39)$$

Desenvolvendo-se (6.39), obtemos a equação na forma paramétrica:

$$p\omega^4 + q\omega^2 + r = 0 \quad (6.40)$$

onde:

$$p = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det [A]$$

$$q = -a_{21}0_{12} - 0_{21}a_{12} + a_{11}0_{22} + 0_{11}a_{22}$$

$$r = -0_{11}0_{22} + 0_{21}0_{12} = -\det [0]$$

As raízes de (6.40) serão:

$$\omega_i = \pm \sqrt{a \pm b} \quad (i=1,2,3,4)$$

com

$$a = -\frac{q}{2p} \quad b = \frac{\sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}$$

De acordo com os valores assumidos por p, q e r e consequentemente pelos autovalores ω_i , pode-se dizer que: Para que haja uma estabilidade simples uma condição necessária é que ω_i seja real. A condição suficiente é que não haja autovalores múltiplos.

Para que (6.40) tenha uma estabilidade simples, com $p > 0$, é preciso que $q < 0$, $r > 0$ e $q^2 - 4pr > 0$, donde tem-se:

$$\omega_1 = -\sqrt{C_1}$$

$$\omega_2 = -\sqrt{C_2}$$

$$\omega_3 = +\sqrt{C_1}$$

$$\omega_4 = +\sqrt{C_2}$$

com

$$C_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p} > 0 \quad C_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p} > 0$$

o que corresponde a estar na Região I da figura (6.3).

Se tivermos:

$$\sqrt{q^2 - 4pr} = 0 \rightarrow q^2 = 4pr, \quad q < 0, \quad \text{tem-se:}$$

$$\omega_1 = -\sqrt{C} \quad \text{com: } C = \frac{q}{2p}$$

$$\omega_2 = -\sqrt{C}$$

$$\omega_3 = +\sqrt{C}$$

$$\omega_4 = +\sqrt{C}$$

o que corresponde a estar sobre a curva Γ^- . Neste caso o sistema pode ser instável porque tem autovalores múltiplos (duas

frequências iguais).

Se tivermos:

$$q^2 - 4pr < 0$$

corresponde a estar na Região II. Tem-se quatro autovalores complexos conjugados (frequências complexas). O sistema é instável pois existem autovalores com a parte real > 0 .

Se tivermos :

$$q > 0 \quad , \quad r > 0$$

$$q^2 - 4pr > 0$$

tem-se quatro autovalores reais simétricos dispostos no eixo real que corresponde a duas frequências imaginárias puras. Se está na Região III e é claro que o sistema é instável.

Se

$$r < 0$$

tem-se dois autovalores reais (simétricos) e dois autovalores imaginários puros (conjugados).

Fazendo-se um gráfico da variação dos parâmetros r e q , com $p > 0$, como mostra a figura (6.3).

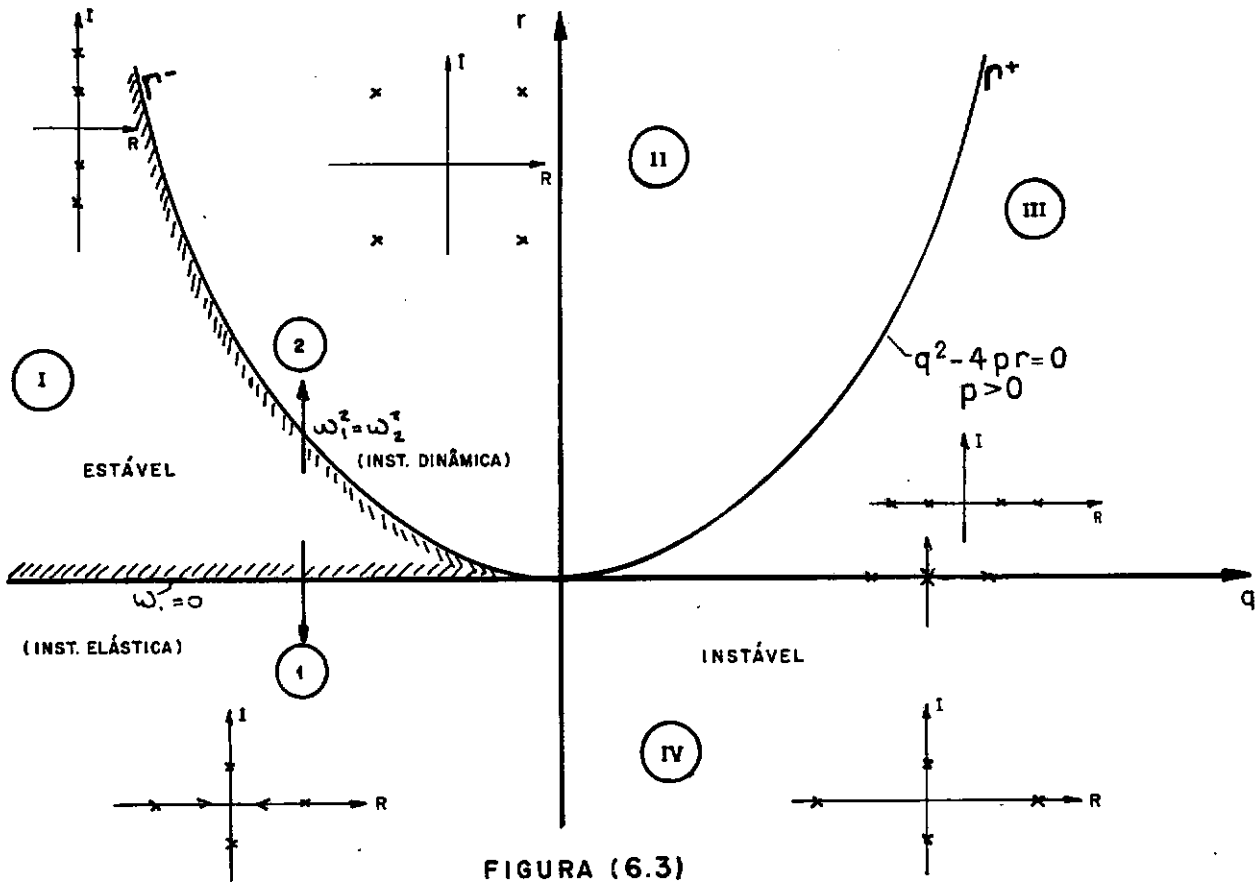


FIGURA (6.3)

Na análise de (2.69) dissemos que quando $a > 0$ o sistema é instável.

Para que se obtenha $a > 0$ existem duas alternativas:

1 - Quando $a = 0$, b decresce e passa pelo valor zero

Na figura (6.3) corresponde a variar o parâmetro r fazendo-o diminuir de valor até passar por zero. Este caso corresponde ao caso de "instabilidade elástica" e está mostrado na figura (6.4).

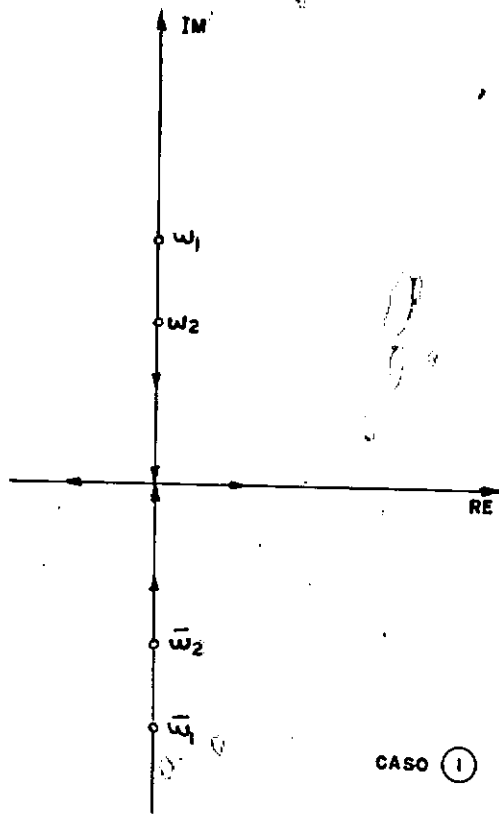


FIGURA (6.4)

Para cada valor da solicitação externa P obtêm-se um valor da frequência. Quando uma das frequências passa pela origem obtêm-se geralmente a carga crítica de instabilidade.

- 2 - Quando a parte imaginária b não passa pela origem, com $a=0$.

Na figura (6.3) corresponde a variar o parâmetro r fazendo-o aumentar até sair da região hachurada I. Este caso corresponde ao caso de "instabilidade oscilatória" ou "instabilidade dinâmica" ou ainda "flutter" e está mostrado na figura (6.5).

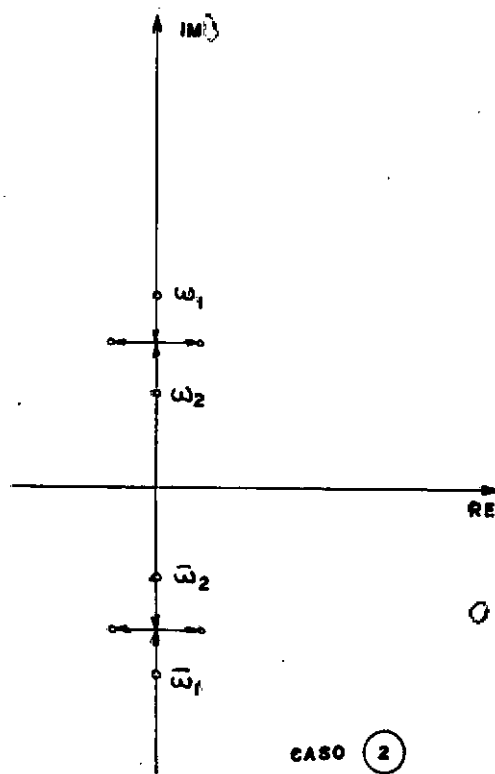


FIGURA (6.5).

Nos dois casos 1 e 2 fazendo-se a variação de ω^2 com P obtemos curvas como mostra a figura (6.6).

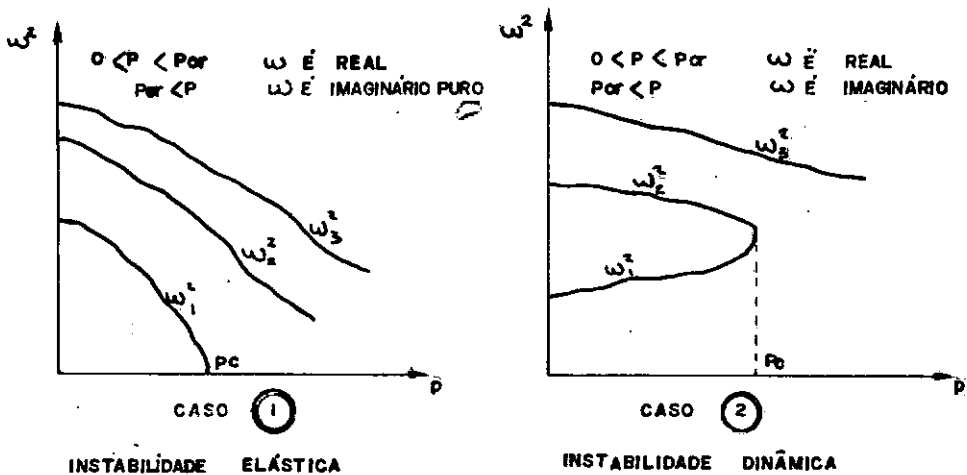


FIGURA (6.6)

A condição necessária e suficiente para que um sistema tenha estabilidade assintótica é que os autovalores tenham todos a parte real < 0 .

Os sistemas conservativos não podem ser assintoticamente estáveis.

6.4 - SUGESTÕES

Fica como sugestão o estudo desta haste mas com dois montantes formando um certo ângulo entre si, como mostra as figuras (6.7) e (6.8). É de se supor que este tipo de estrutura seja mais estável que o apresentado neste trabalho, visto que estes dois montantes funcionariam equivalentemente a asas de um avião.

Da figura (6.7), as componentes H tenderiam a estabilizar a estrutura fazendo com que o perfil voltasse à sua posição inicial, ao passo que as componentes V levariam o perfil à instabilidade.

Outra sugestão será um estrado constituído com estes tipos de hastes como mostra a figura (6.7).

E, como última sugestão, seria interessante se fazer um estudo experimental sobre a estabilidade destas estruturas.

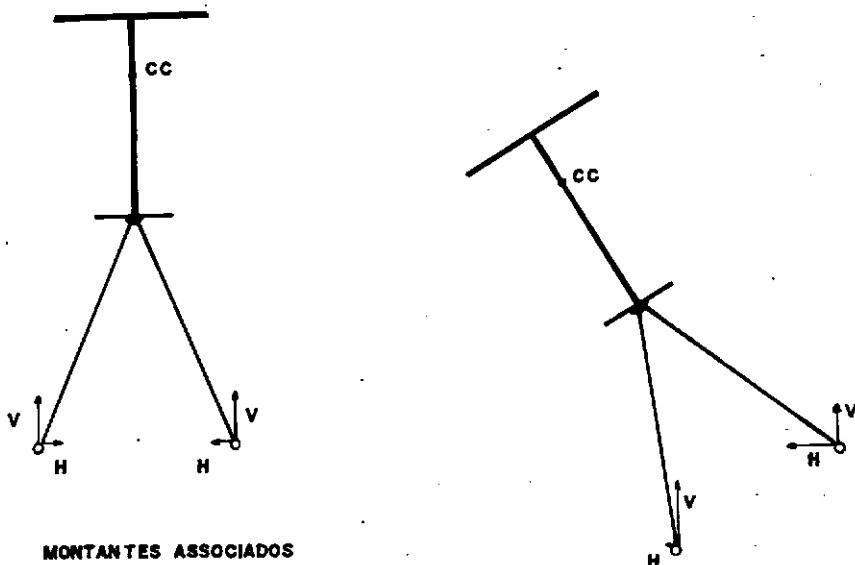


FIGURA (6.7)

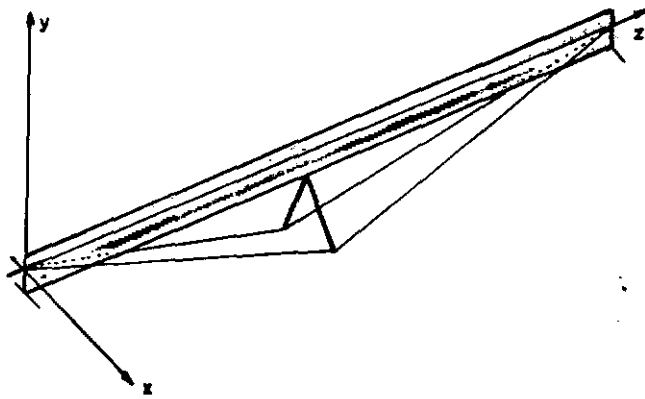
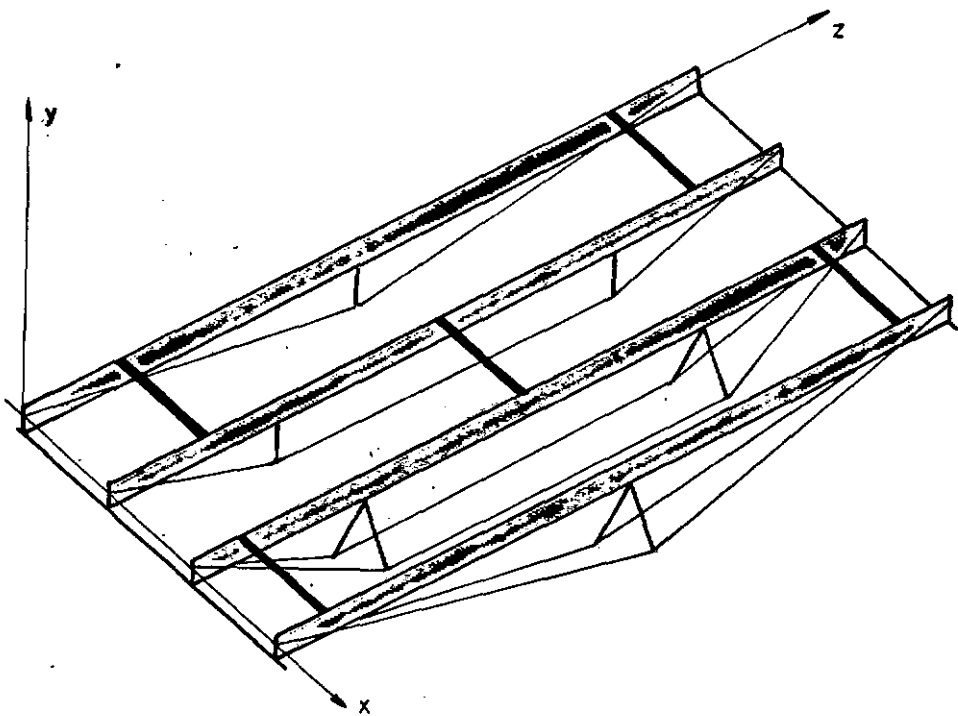


FIGURA (6.8)



ESTRADO CONSTITUIDO COM ALGUNS TIPOS DE HASTES COM PROTENSÃO EXTERNA ASSOCIADAS.

FIGURA (6.9)

BIBLIOGRAFIA

- |1| Koiter, Warner Tjardus, "On the Stability of Elastic Equilibrium", Dissertation Thesis, 1945, NASA, Tech. Transactions, F10, 833, 1967.
- |2| Timoshenko, Stephen P., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Company, Sec. Edition, 1961.
- |3| Hildebrand, Francis B., "Methods of Applied Mathematics", Prentice-Hall, Sec. Edition, 1968.
- |4| Courant, R., "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", Bull. American Mathematical Society, Vol.49, pag.1-23', 1943.
- |5| K. Friedrichs, "Ein Verfahren der Variationsrechnung ...", Goettingen Nachrichten, 1929, p.13 ff .
- |6| E. Trefftz, "Ueber Fehlerabschätzungen Bei Berechnung von Eigenwerten", Math. Ann., Vol.108, 1933, p.595 ff.
- |7| Croll, J.G. and Walker, A.C., "Elements of Structural Stability", The MacMillan Press, 1972.
- |8| Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W., "A General Theory of Elastic Stability", John Wiley and Sons, 1973.
- |9| Naylor, Arch. W. and Sell, George R., "Linear Operator Theory in Engineering and Science", Part B, Hilbert Spaces, pag. 272, Holt, 1971.

- |10| Bürgermeister G.; Steup H.; Kretzschmar H., "Stabilitätstheorie", Akademie-Verlag, Berlin, 1966.
- |11| Bolotin, V.V., "The Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden-Day Inc., 1964.
- |12| Langhaar, H.L., "Energy Methods in Applied Mechanics", John Wiley and Sons, 1962.
- |13| Bleich, Friedrich, "Buckling Strength of Metal Structures", Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1952.
- |14| Bevilacqua, Luis, "Métodos Variacionais", Notas de Aula, COPPE/UFRJ, 1973.
- |15| Gantmacher, F. , "Lectures in Analytical Mechanics", MIR Publishers, Moscow, 1970.
- |16| Hagedorn, Peter B., "On the Lateral Buckling of a Beam Subjected to the Reaction of a Pulsating Fluid Jet", COPPE/UFRJ, P.570, Março/1970.
- |17| Caprari, Agustin A., "Estudio Teórico-Experimental de Inestabilidad de Vigas Asociadas", Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Maio/1974.
- |18| Loula, Abimael e Galeão, Augusto C., "Vibração de Sistemas Elásticos Lineares", COPPE/UFRJ, PDD 3.76, Fevereiro/1976.
- |19| Elsgoltz, L. , "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional", Editorial MIR, Moscu, 1969.

- [20] Pereira, Humberto L.C., "Análise de Estabilidade Elástica pelo Método dos Elementos Finitos", Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Dezembro/1973.
- [21] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V., "Cálculus of Variations", Prentice Hall, 1963.
- [22] Bevilacqua, Luis, "Instabilidade do Equilíbrio de um Estrado de Hastes Associadas", COPPE/UFRJ, P.5.68, Abril/1968.
- [23] Gere, James M. & Weaver, W., "Matrix Algebra for Engineers", D. Van Nostrand Company, Inc., 1968.
- [24] Drucker, D.C., "A Definition of Stable Inelastic Material", Journal of Applied Mechanics, Março/1969.
- [25] Oliveira, Eduardo R. Arantes, "Introdução à Teoria das Estruturas de Comportamento Linear", LNEC, Lisboa, Dezembro/1966.
- [26] Hurty, Walter C. and Rubinstein, Moshe F., "Dynamics of Structures", Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, 1967.
- [27] Meirovitch, L., "Methods of Analytical Dynamics", McGraw-Hill, New York, 1970.
- [28] Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., "Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional", Editorial MIR, Moscu, 1972.
- [29] Meirovitch, L., "Analytical Method in Vibrations", Mc Millan, New York, 1967.

- [30] Massey, Campbell, "Lateral Stability of Non Uniform Elastic Beams", Civil Engineering and Public Works Review, Julho/1967.
- [31] Clark, J.W. and Hill, H.N., "Lateral Buckling of Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Julho/1960.
- [32] Galambos, Theodore V., "Inelastic Lateral Buckling of Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Outubro/1963.
- [33] Mei, Chuh, "Coupled Vibrations of Thin Walled Beams of Open Section using the Finite Element Method", International Journal of Mechanics and Science", Pergamon Press, Vol.12, pp.875-882, 1970.
- [34] Tavares, G.A., "Cálculo Numérico - Nomografia", Notas de Aula, E.E. Mauá, 1969.
- [35] Horne, M.R., "The Elastic Lateral Stability of Trusses", The Structural Engineer, Maio/1960.
- [36] Santos, Sydney M.G., "Flambage Latéral des Poutres avec Liaison Simple", Int. Assoc. Bridge and Structure Eng., V.17, 1957, pp.197-208.
- [37] Timoshenko, Stephen P. & Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Company, 1951.
- [38] Bolotin, V.V., "Non Conservative Problems of Theory of Elastic Stability", Pergamon Press, 1963.
- [39] Gomes, Paulo A., "Estabilidade Elástica", Notas de Aula, COPPE/UFRJ, 1974.

- [40] Roorda, J. , "The Bucking Behaviour of Imperfect Structural Systems", J.Mechan.Phys. Solids, 13,267/1965.
- [41] Chilver,A.H. , "Coupled Modes of Elastic Buckling", J. Mech. Solids, 15, 15/1967.
- [42] Supple,W.J., "Coupled Buckling Modes of Structures", Ph. D. Thesis, University College London, 1966.

A P P E N D I C E S

APÊNDICE ICONCEITO DE ESTABILIDADE MATERIAL

As restrições impostas que muitas vezes aparecem, limitam a classe de certos materiais possíveis de se utilizar. Dado um corpo submetido a um sistema de forças \vec{R} em equilíbrio. Considera-se agora uma variação virtual do campo de deslocamentos (\vec{u}) devida à aplicação de esforços adicionais.

Pode-se dizer que o corpo está em equilíbrio estável, instável ou indiferente, conforme o trabalho realizado pelos esforços adicionais for positivo, negativo ou nulo. A condição de estabilidade é pois^[25]:

$$\int_V \delta \vec{P} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_S \delta \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{u} dS > 0 \quad (1.1)$$

para uma variação $\delta \vec{u}$ não identicamente nula, onde:

\vec{P} = vetor das forças de massa

$\vec{\sigma}$ = vetor das tensões aplicadas em um ponto da fronteira S

V = domínio ou volume do corpo

S = fronteira do domínio ou superfície do corpo

O Teorema do Trabalho permite então escrever:

$$\int_V \delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV > 0 \quad (1.2)$$

onde:

σ_{ij} = componente de tensão

ϵ_{ij} = componente de deformação

Para que todas as partes do corpo sejam estáveis em si mesmas, isto é, uma vez consideradas isoladamente, tem-se

$$\delta\sigma_{ij} \cdot \delta\epsilon_{ij} > 0 \quad (1.3)$$

Esta é uma condição que só depende das propriedades do material e que se designa por "condição de estabilidade material"^[25]. Um corpo é dito materialmente estável na vizinhança de um dado estado de deformação se, a uma variação arbitrária das deformações $\delta\epsilon_{ij}$ muito pequena, mas não nula, corresponder uma variação $\delta\sigma_{ij}$ das tensões tal que (1.3) se verifique.

A estabilidade material só implica a estabilidade global do corpo, expressa por (1.1), se for admissível a hipótese da linearidade geométrica e se as ligações exteriores forem em número suficiente para impedir quaisquer deslocamentos rígidos virtuais. Na figura(1) pode-se ver os limites de estabilidade material em dois casos.

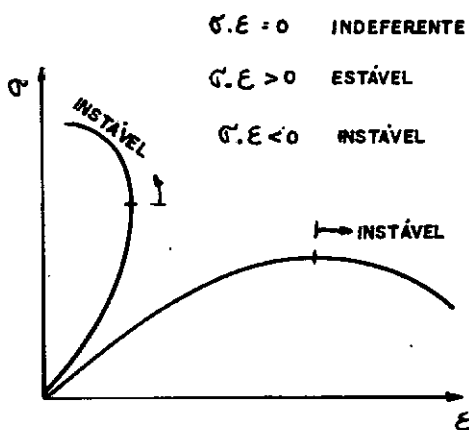


FIGURA (1)

APÊNDICE IISISTEMAS HOLONÔMICOS, NÃO HOLONÔMICOS E ESCLERONÔMICOS

Contrariamente a certos sistemas livres de se moverem, existem aqueles que estão sujeitos a certas restrições e que podem ser de natureza geométrica ou cinemática.

Analiticamente a restrição pode ser apresentada da seguinte forma:

$$f(t, r, \dot{r}) = 0 \quad (2.1)$$

onde:

r = vetor posição

\dot{r} = velocidade

Se em (2.1) não aparecer a velocidade, então:

$$f(t, r) = 0 \quad (2.2)$$

nós dizemos que a restrição é "finita ou geométrica". Genericamente (2.1) é chamado restrição "diferencial" ou "cinemática".

A restrição (2.2) é chamada "estacionária" se t não está expresso explicitamente na equação de restrição, isto é, se $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

O sistema é chamado HOLONÔMICO se as partículas do sistema não estão sujeitas a restrições diferenciais não integráveis. Pode-se dizer que um sistema livre é um sistema ho-

lonômico, ou ainda qualquer sistema que tenha restrições finitas ou diferenciáveis mas que sejam integráveis.

Um sistema é chamado NÃO HOLONÔMICO se há restrições diferenciais não-integráveis.

Um sistema é dito ESCLERONÔMICO se são impostas somente restrições estacionárias, assim:

$$f(r) = 0 \quad (2.3)$$

Caso contrário, ele é dito REONÔMICO, ou seja;

$$f(t,r) = 0$$

APÊNDICE IIICÁLCULO DAS VARIAÇÕES3.1 - INTRODUÇÃO

Os problemas físico-matemáticos são regidos por "equações diferenciais" ou também pelos chamados "princípios de mínimo". Ao se defrontar com estes tipos de problemas tem-se que ter sempre em mente que existem dois caminhos para estudá-los. O primeiro caminho é devido à chamada "Mecânica Newtoniana" e que está baseada nos princípios e leis de Newton e no cálculo vetorial.

O outro caminho é devido à chamada "Mecânica Lagrangeana" baseada em princípios variacionais, é mais recente do que a primeira e mais versátil, por assim dizer, no tratamento geral dos problemas. Este apêndice se refere ao cálculo das variações, ferramenta fundamental da Mecânica Lagrangeana.

O problema de se resolver uma equação diferencial com determinadas condições de contorno é equivalente, matematicamente, ao problema típico do cálculo das variações o de achar uma função que minimiza uma certa integral da qual se pode obter as equações diferenciais do fenômeno, e que estas equações diferenciais são nada mais que as equações de Euler-Lagrange a serem introduzidas posteriormente em (3.10).

O "cálculo das variações" estuda os métodos que

permitem achar os valores máximos e mínimos dos funcionais que passaremos a tratar a seguir.

Do ponto de vista formal, o problema da extremização de uma integral definida é considerado como sendo própria do cálculo das variações, enquanto que o problema da extremização de uma função pertence ao cálculo diferencial.

3.2 - FUNCIONAL

Os métodos de resolução de problemas variacionais, isto é, problemas sobre a investigação dos máximos e mínimos dos funcionais se assemelham muito aos métodos de investigação dos máximos e mínimos das funções. Se chamam "funcionais" as "grandezas variáveis" e cujos valores se determinam mediante a eleição de uma ou de várias funções candidatas. No caso de uma função tem-se que para cada valor assumido pela variável independente existe como correspondente um outro valor associado. Em outras palavras podemos dizer que uma função escalar real de uma variável também real pode ser interpretada como sendo um operador f tal que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (f é uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R}).

DEFINIÇÃO 3.2.1:

Seja \mathcal{X} um conjunto de elementos quaisquer. Se F denota uma aplicação de \mathcal{X} em \mathbb{R} ($F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$) de maneira que para todo elemento $y \in \mathcal{X}$ existe um único número real

$\alpha \in \mathbb{R}$, logo F recebe o nome de "funcional em \mathcal{X} " ou "funcional definido em \mathcal{X} ". Então:

Se $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y \mapsto \alpha = F(y) \rightarrow \text{único}$$

logo F é funcional em \mathcal{X} .

Como já se pode perceber ao se tratar com funcionais se está diretamente ligado ao conceito de "espaço de funções", o próximo item a ser introduzido.

3.3 - ESPAÇO DE FUNÇÕES

No estudo de funções de n variáveis é conveniente interpretar ao conjunto de " n " números (x_1, x_2, \dots, x_n) como sendo as coordenadas de um ponto no espaço Euclidiano n -dimensional (E_n). Da mesma maneira, quando se trabalha com funcionais, se pode generalizar a idéia anterior e considerar cada função u , pertencente a determinada classe, como sendo um "ponto" de um certo espaço, espaço este cujos elementos são portanto funções e que será conveniente chamá-lo "espaço de funções".

Quando se está trabalhando com funções de n variáveis independentes é suficiente considerar um espaço E_n . Agora, quando se está trabalhando com funcionais isto não ocorre e a natureza do problema determinará em geral a escolha do espaço de funções. Por exemplo:

Seja o funcional:

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x), u''(x)) dx \quad (3.1)$$

É natural se considerar o domínio de F , $\mathcal{F}(F)$ como sendo o conjunto de todas as funções com derivadas segundas contínuas, isto é;

$$\mathcal{F}(F) = \{u; u \in C^2(a, b)\} \quad (3.2)$$

O conceito de continuidade é fundamental no estudo dos funcionais e no estudo das funções. Da mesma maneira como se introduz o conceito de distância entre um ponto e a origem do sistema, também no espaço de funções se define, de maneira análoga, o conceito de "norma" de uma função que é o mesmo que distância entre funções, sendo:

$$\|u\| \rightarrow \text{norma de } u$$

3.4 - VARIAÇÃO DE UM FUNCIONAL

O conceito a ser introduzido aqui diz respeito à "variação" de um funcional, análogo ao conceito de diferencial de uma função. Este conceito nos permitirá estabelecer as condições para a existência de extremos, máximos e mínimos relativos de um funcional.

Seja $F|Y|$ um funcional definido em um subconjunto aberto Y de um espaço linear normado \mathcal{F} . Logo, se $y_0 \in Y$ e $h \in \mathcal{F}$ tal que $\|h\| < \delta$ então $F|y_0+h|$ fica definido em Y . Nota-se que dado um $\delta > 0$ e $h \in \mathcal{F}$, $\|h\| < \delta$ sempre será possível dado um h determinar um t , com $t \in \mathbb{R}$,

tal que $\|th\| < \delta$ e portanto $F|y_0+th|$ também fica definido em Y .

A expressão

$$Lg|h| = \left. \frac{d}{dt} F|y_0+th| \right|_{t=0} = \delta F|h|$$

é chamada de "variação de Gateaux" ou "primeira variação de $F|y|$ em $y=y_0$ ".

Podemos tirar a propriedade da primeira variação funcional que é:

$$\delta F|\lambda h| = \lambda \delta F|h|$$

Com $F|y|$ em y_0 , para todo $h \in S$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para maiores detalhes, consultar a referência [14].

3.5 - ESPAÇOS DE FUNÇÕES ADMISSÍVEIS E ESPAÇO DE VARIAÇÕES ADMISSÍVEIS

Consideremos o seguinte problema variacional: "o de encontrar a função $y = y(x) \in C^1[a,b]$ tal que minimize o funcional:

$$F|y| = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (3.3)$$

e tal que:

$y(a) = y_a, y(b) = y_b$ sejam as condições de contorno. Resulta evidentemente que só nos interessa, de todas as funções

$y \in C^1[a,b]$, aquelas que satisfaçam as condições de contorno. O conjunto destas funções se chamará "espaço de funções competitivas" ou candidatas ou ainda "espaço de funções admissíveis". Então, para o exemplo apresentado, se tem:

$$\Sigma = \{y; y \in C^1[a,b], y(a)=y_a, y(b)=y_b\} \quad (3.4)$$

onde Σ é chamado "espaço de funções admissíveis".

Introduziremos agora, para um certo espaço de funções admissíveis, o que vem a ser o conceito de "campo ou espaço de variações admissíveis", assim: Sendo $\Sigma \subset \mathcal{X}$, $H \subset \mathcal{X}$ é chamado de campo de variações admissíveis de Σ se para $\forall y \in \Sigma$ e $h \in H$ resulta $(y+h) \in \Sigma$.

3.6 - EXTREMO DE UM FUNCIONAL

Seja $\Sigma \subset \mathcal{X}$ o espaço de funções admissíveis de um certo funcional $F|y|$. Se diz que $y_0 \in \Sigma$ conduz $F|y|$ a um mínimo relativo (ou máximo relativo) em Σ se:

$$F|y| - F|y_0| \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (3.5)$$

para todo $y \in \Sigma$, tal que $\|y-y_0\| \leq \delta$, para $\delta > 0$.

Tomando-se em conta a definição de espaço de variações admissíveis, tem-se:

$$F|y_0+h| - F|y_0| \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (3.6)$$

para todo $h \in H$, donde H é o espaço de variações admissíveis de Σ .

3.7 - MÁXIMOS E MÍNIMOS RELATIVOS FORTES E DÉBEIS

Como já se sabe $F|y|$ está definido em um subconjunto aberto Σ de um certo e.l.n. \mathcal{X} . Dependendo do tipo de norma (conceito de distância) adotada surgem diferentes tipos de mínimos e máximos relativos. Por exemplo, suponhamos que \mathcal{X} seja idêntico a $C^1[a,b]$. Em \mathcal{X} pode-se definir como norma:

$$\|y\| = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| \quad (3.7)$$

Esta norma que acabamos de mostrar será designada como sendo uma "norma débil" já que ela requer poucas condições para a distância entre funções. Se em lugar dela definirmos a norma

$$\|y\| = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)| \quad (3.8)$$

Esta será designada como sendo uma norma forte já que obriga a ter outra condição relacionada com a derivada primeira da função. Isto significaria uma aproximação entre funções não só ponto a ponto mas também por derivadas. A figura (3.1) mostra uma aproximação débil

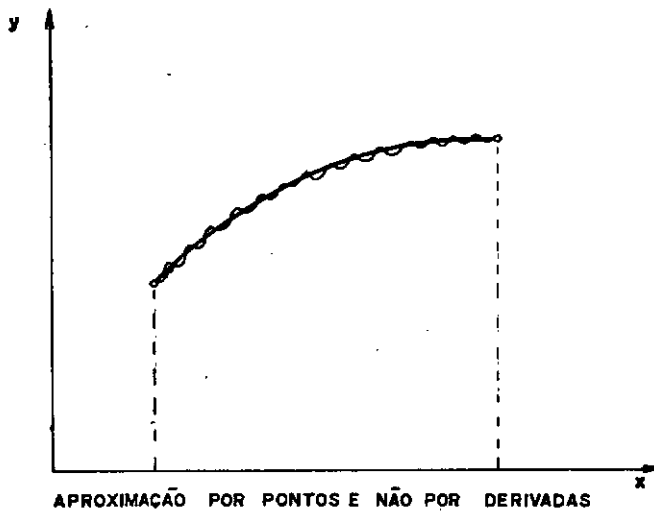


FIGURA (3.1)

3.8 - CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA A EXISTÊNCIA DE UM MÍNIMO RELATIVO

Se o funcional $F[y]$ (supõe-se que existe a primeira variação em $y_0 \in \Sigma \subset \mathcal{Y}$, donde Σ admite um espaço linear de variações admissíveis H), assume um mínimo (ou máximo) em $y=y_0$ é necessário que:

$$\delta F|h| = 0 \quad \text{para todo } h \in H.$$

3.9 - LEMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

Se $M(x)$ é uma função contínua no intervalo $[x_1, x_2]$ e se:

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0 \tag{3.9}$$

para qualquer função $\eta(x)$ contínua e diferenciável em $[x_1, x_2]$

e anulando-se em x_1 e x_2 , ou seja, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ então
 $M(x) = 0 \quad \forall x_1 \leq x \leq x_2$

Demonstração: (Esta demonstração se deve a Du-Bois-Reymond)

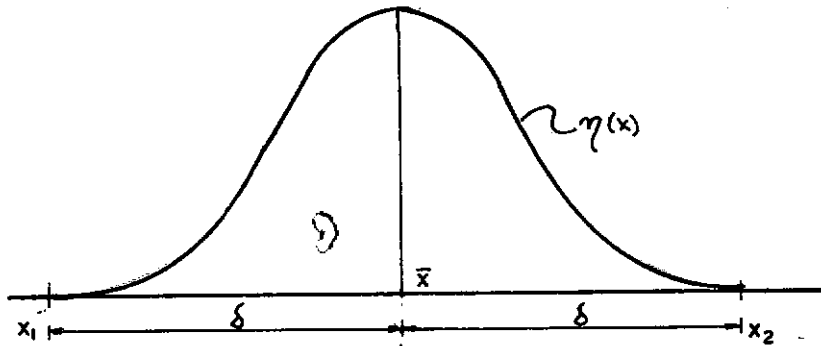


FIGURA (3.2)

Suponha que $M(\bar{x}) \neq 0$ para um ponto $x_1 < \bar{x} < x_2$.

Admitamos sem perda de generalidade que $M(\bar{x}) > 0$. Tomemos $\eta(x)$ definido por, ver figura (3.2):

$$\eta(x) \begin{cases} 0 & \rightarrow \bar{x} - \delta \geq x \\ (x - \bar{x} - \delta)^2 (x - \bar{x} + \delta)^2 & \rightarrow \bar{x} + \delta > x > \bar{x} - \delta \\ 0 & \rightarrow x > \bar{x} + \delta \end{cases}$$

onde δ é escolhido de tal forma que $M(x) > 0$ em $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$, o que é sempre possível pois $M(x)$ é contínua em $[x_1, x_2]$. Então:

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = \int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} M(x) (x - \bar{x} - \delta)^2 (x - \bar{x} + \delta)^2 dx > 0 \quad (3.10)$$

pois $M(x)$ e $\eta(x)$ são positivos no intervalo de integração. A desigualdade acima contraria a hipótese, donde $M(x) = 0$ no intervalo $[x_1, x_2]$.

3.10 - EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Como já foi dito, o problema básico no cálculo das variações é determinar uma função que "extremiza" uma certa integral definida e que envolve esta função e suas derivadas. Estas equações são chamadas de "equações de Euler-Lagrange" devido ao fato de que primeiramente o matemático Euler desenvolveu a teoria da extremização de uma integral, e as expressões obtidas são nada mais que as equações de Lagrange obtidas da mecânica Lagrangeana através do enfoque variacional. Por esta razão são conhecidas como "equações de Euler-Lagrange".

Considere-se o seguinte problema variacional:
"Determinar a função $y_*(x)$ para a qual a integral

$$F[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (3.11)$$

toma um valor máximo ou mínimo no intervalo $[a, b]$ e que satisfaça as condições de extremidade $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$
..... (3.12)

Para facilitar daqui em diante será suposto que queremos minimizar $F[y]$.

Supondo que $y(x)$ é a função minimizante e escolhemos convenientemente uma função contínua e diferenciável $\eta(x)$ de mesma classe que $y(x)$ e que desaparece nos pontos extremos $x=a$ e $x=b$. Podemos, escolhendo um parâmetro adimensional ϵ , representar um campo de funções candidatas à minimização do funcional por:

$y_*(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$, e que para derivadas tem-se:

$$y'_* = y'(x) + \epsilon \eta'(x) .$$

Substituindo na expressão (3.11) e observando que o funcional passa a ser função do parâmetro ϵ , obtêm-se:

$$F(\epsilon) = \int_a^b f(x; y + \epsilon \eta; y' + \epsilon \eta') dx \quad (3.13)$$

É fácil de se perceber que quando $\epsilon=0$ obtêm-se $y_*(x)=y(x)$, solução do problema. Portanto pode-se dizer que $F(\epsilon)$ toma um valor mínimo quando $\epsilon=0$, daí tiramos a condição de extremo de um funcional:

$$\frac{dF(\epsilon)}{d\epsilon} = 0 \quad \text{quando } \epsilon=0 \quad (3.14)$$

Chamando $\bar{f} = f(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta')$ e fazendo a diferenciação com relação a ϵ tem-se:

$$\frac{d\bar{f}}{d\epsilon} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y'} \eta' \quad (3.15)$$

e que de (3.13) resulta:

$$\frac{dF(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \eta + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y'} \eta' \right) dx \quad (3.16)$$

Visto que $\bar{f} \rightarrow f$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, o que é verdade para derivadas parciais, a condição (3.16) toma a forma

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0 . \quad (3.17)$$

Aplicando a integração por partes para reduzir tudo a um mesmo n obtém-se:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] n(x) dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} n(x) \right|_a^b = 0 \quad (3.18)$$

Mas visto que $n(x)$ é nulo nas extremidades, de (3.18) ficamos com:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] n(x) dx = 0 \quad (3.19)$$

Finalmente, do "Lema Fundamental do Cálculo das Variações", e lembrando que $n(x)$ é arbitrário desde que $n(a)=n(b)=0$ seja contínua e diferenciável, concluimos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.20)$$

Esta é a chamada "Equação de Euler-Lagrange" em sua forma diferenciável para o funcional (3.11). As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y'}$ foram tratadas aqui fazendo-se x, y e y' variáveis independentes. Visto que $\frac{\partial f}{\partial y'}$ é em geral função explícita de x e implícita de y e sabendo que $y' = \frac{dy}{dx}$, o segundo termo pode ser escrito na sua forma expandida:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx} \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.20) vem:

$$f_{y'y'} \frac{d^2 y}{dx^2} + f_{y'y} \frac{dy}{dx} + (F_{y'x} - F_y) = 0 \quad (3.22)$$

A expressão (3.22) é chamada de "forma expandida" da equação de Euler-Lagrange.

3.11 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NATURAIS

Quando o valor da função candidata $y(x)$ não é previamente assumido em um ou nos dois pontos extremos (a e b) a diferença $\epsilon\eta(x)$ entre a função minimizante e a função candidata dada por $y(x) + \epsilon\eta(x)$ não é nula. Porém o primeiro membro da expressão (3.18) deve ser igual a zero para que haja um mínimo quando $y(x) = y_*(x)$ para todas as variações possíveis de $\epsilon\eta(x)$. E em particular, (3.18) deve ser igual a zero para todas as variações nulas nos extremos.

Já sabemos que o primeiro termo de (3.18) deve ser nulo para qualquer valor de $\eta(x)$. Para que (3.18) seja verdade, segue-se que o segundo termo também deve ser nulo. Então, tem-se outra condição que deve ser satisfeita:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x=b} - \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x=a} = 0 \quad (3.23)$$

Se $y(x)$ não possui um valor prévio nos pontos extremos, então $\eta(a)$ e $\eta(b)$; ambos são completamente arbitrários, concluímos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=b} &= 0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{x=a} &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

e que nada mais são que condições de contorno do problema. São chamadas "condições de contorno naturais" porque aparecem "naturalmente" da minimização do funcional. Existem também as condições de contorno "geométricas" a serem tratadas adiante, mas é importante dizer que estas condições são especificadas para cada tipo de problema estudado.

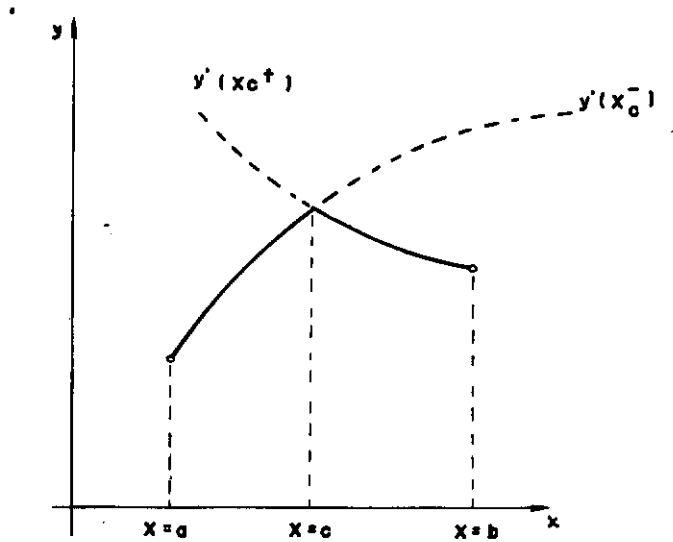
3.12 - CONDIÇÕES DE ERDMAN-WEIERSTRASS PARA EXTREMOS COM PONTOS ANGULOSOS

Apresenta-se a seguir as condições necessárias para que um funcional possa ter dentro de seu intervalo de integração um ponto anguloso e que são as chamadas "Condições de Erdman-Weierstrass". Este tipo de problema pode aparecer em estudo de hastes constituídas de materiais diferentes, problema de transmissão de calor, em materiais de condutividade diferentes e ainda em hastes sujeitas a ações e cuja solicitação admite pontos singulares (caso de esforços cortantes sob carga concentrada). Isto equivale a dizer que a própria curva que extremiza o funcional tem uma descontinuidade em sua derivada primeira, onde se situa o ponto anguloso ao qual nos referimos.

Consideremos ainda o funcional (3.11); para que o funcional admita este tipo de solução são necessárias duas condições. Suponha que as funções admissíveis admitam um ponto anguloso em $x=c$. Tem-se da figura (3.3)

$$F[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx = \int_a^c f(x, y, y') dx + \int_c^b f(x, y, y') dx = F_1[y] + F_2[y]$$

sendo que $y \in C'$ nos intervalos $a \leq x < c$, $c < x \leq b$ (3.25)



FIGURA(3.3)

A condição necessária para um mínimo exige que a equação de Euler-Lagrange seja válida nas duas regiões definidas. A minimização de (3.25) conduz então a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \frac{\partial F_1}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \frac{\partial F_2}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^c (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) n dx + \\ &+ \int_c^b (f_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) n dx + F_{y'} n \Big|_a^{c^-} + F_{y'} n \Big|_{c^+}^b = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como $n(a) = n(b) = 0$ e sendo n contínuo, segue:

$$F_{y'} n \Big|_{c^-} - F_{y'} n \Big|_{c^+} = 0 \quad (3.27)$$

E ainda como $n(c^-) = n(c^+) = n(c)$, vem:

$$n(c) \left[F_{y'} \Big|_{c^-} - F_{y'} \Big|_{c^+} \right] = 0 \quad (3.28)$$

donde:

$$F_{y'} \Big|_{c^-} = F_{y'} \Big|_{c^+} \quad (3.29)$$

De (3.29) concluímos a primeira condição, ou seja, $F_{y'}$ é contínua em $[a, b]$.

A segunda condição é obtida quando fazemos a troca das variáveis independentes e dependentes, que nos dá:

$$F = \int_a^b f(y, y', x) dx = \int_{y_0}^{y_1} f(y, x, \frac{1}{x'}) x' dy \quad (3.30)$$

onde

$$x' = \frac{dx}{dy}.$$

O funcional (3.30) em sua nova forma, admitindo uma curva extremizante $x=x(y)$ com ponto anguloso deve obedecer à condição anterior, que agora toma a forma:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x'} f(y, x, \frac{1}{x'}) x' \right|_{x=c^-} = \left. \frac{\partial}{\partial x'} f(y, x, \frac{1}{x'}) x' \right|_{x=c^+}$$

ou

$$f(y, x, \frac{1}{x'}) + x' \frac{\partial f}{\partial x'}(y, x, \frac{1}{x'}) \Big|_{x=c^-} = f(y, x, \frac{1}{x'}) + x' \frac{\partial f}{\partial x'}(y, x, \frac{1}{x'}) \Big|_{x=c^+}$$

mas

$$f_{x'} = \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial y'} \left(- \frac{1}{x'^2} \right), \text{ donde se segue que:}$$

$$f(y, y', x) - y' f_{y'}(y, y', x) \Big|_{x=c^-} = f(y, y', x) - y' f_{y'}(y, y', x) \Big|_{x=c^+} \dots (3.31)$$

que é a segunda condição.

3.13 - FUNCIONAIS QUE DEPENDEM DE DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Consideremos agora o funcional da forma

$$F[y] = \int_a^b f(y^n, y^{n-1}, \dots, y', x) dx \quad (3.32)$$

com as condições:

$$y(a) = y_a ; \quad y'(a) = y'_a ; \quad \dots ; \quad y^{n-1}(a) = y_a^{n-1}$$

$$y(b) = y_b ; \quad y'(b) = y'_b ; \quad \dots ; \quad y^{n-1}(b) = y_b^{n-1}$$

O procedimento usado para minimizar (3.32) é se melhante ao utilizado no caso em que f depende apenas de y', y, x . O espaço de variação constituído de funções candidatas é o mesmo utilizado anteriormente, ou seja, $y(x) = y_*(x) + \epsilon \eta(x)$. Após utilizada a mesma técnica, chega-se à seguinte equação de Euler-Lagrange de ordem n :

$$\frac{d}{dx} f_{y^n} (-1)^n + \dots + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \frac{d}{dx} f_{y'} + f_y = 0 \quad (3.33)$$

que é a condição necessária para o mínimo.

APÊNDICE IV

PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

Neste apêndice introduz-se três princípios variacionais que são o elo de ligação entre a mecânica Newtoniana e a mecânica Lagrangeana.

4.1 - PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Os conceitos de deslocamento virtual e trabalho virtual serão introduzidos durante o estudo, onde eles são usados para resolver problemas de equilíbrio estático. O trabalho virtual implica em quantidades puramente hipotéticas e que não existem do ponto de vista físico. Assim, o deslocamento virtual é um deslocamento imaginário e que é imposto arbitrariamente sobre o sistema estrutural.

O trabalho dado por forças reais durante o deslocamento virtual é chamado de trabalho virtual.

Consideremos uma partícula e cujo movimento está confinado à superfície

$$S(x_j) = 0 \quad j=1,2,3 \quad (4.1)$$

onde S é uma função de classe C^2 em x_j .

As coordenadas x_j da partícula atendem à con-

dição cinemática (4.1), isto significa que a partícula deve mover-se com velocidade tangente à superfície, portanto ter-se-á:

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} \dot{x}_j = 0 \quad (4.2)$$

A equação (4.2) determina ainda que os deslocamentos possíveis dx_j devem satisfazer a equação:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (4.3)$$

Entende-se por deslocamento possível, ao conjunto de todos os deslocamentos $d\mathbf{r}^*$ com componentes dx_j , que a partícula pode realizar no intervalo de tempo dt . O deslocamento real do ponto pertence a este conjunto.

Do confinamento do movimento da partícula à superfície (1.1) surge, além das forças aplicadas, uma força de restrição normal à superfície se não está considerando forças de atrito.

Sendo \mathbf{F} esta força e F_j suas componentes, tem-se:

$$F_j = \lambda \frac{\partial S}{\partial x_j} \quad j=1,2,3 \quad (4.4)$$

De (4.3) e (4.4) concluímos que o trabalho realizado pela força de restrição sobre qualquer deslocamento possível é nulo, tem-se:

* O til colocado abaixo da variável indica que ela é um vetor ou uma matriz.

$$dw = F_j dx_j = \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0 \quad (4.5)$$

Se considerarmos deslocamentos virtuais δx_j , que são independentes do tempo, então:

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad (4.6)$$

e consequentemente teremos:

$$\delta w = F_j \cdot \delta x_j = 0 \quad (4.7)$$

De (4.7) podemos afirmar que o trabalho realizado pela força de restrição sobre qualquer deslocamento virtual é nulo. No caso em que as restrições dependem do tempo, os deslocamentos virtuais não são deslocamentos possíveis.

Dado um sistema de N partículas, sendo que cada uma está sob a ação de forças de resultante \underline{R}_i . Se o sistema está em equilíbrio, resulta $\underline{R}_i = \underline{0}$ e teremos como consequência

$$\delta w = \underline{R}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad i=1,2,3,\dots,N \quad (4.8)$$

Se o sistema apresentado está sujeito a restrições tem-se dois tipos de forças: as forças aplicadas \underline{P}_i e as forças de restrição \underline{F}_i , portanto:

$$\underline{R}_i = \underline{P}_i + \underline{F}_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.8), vem:

$$\delta w = \underline{P}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \underline{F}_i \delta \underline{r}_i = 0 \quad (4.10)$$

Mas de (4.7) resultou que o trabalho das forças \underline{F}_i sobre deslocamentos $\delta \underline{r}_i$ é nulo. Portanto de (4.10) ficamos com:

$$\delta w = \underline{P}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (4.11)$$

A expressão (4.11) é devida ao princípio dos trabalhos virtuais e nos diz que "o trabalho que as forças aplicadas realizam sobre os deslocamentos virtuais é nulo".

O "Princípio dos Trabalhos Virtuais" é o primeiro princípio variacional em mecânica. Pode-se mostrar^[18] que o Princípio dos Trabalhos Virtuais é equivalente à condição de equilíbrio estático, mas ele pode ser estendido a problemas dinâmicos por meio do princípio de D'Alembert apresentado a seguir.

4.2 - PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

A segunda Lei de Newton aplicada a uma partícula de massa m_i é expressa por:

$$\underline{P}_i + \underline{F}_i = m_i \ddot{\underline{r}}_i \quad (4.12)$$

onde:

\underline{P}_i - força aplicada

\underline{F}_i - força de restrição

$m_i \ddot{\underline{r}}_i$ - momentum linear

A expressão (4.12) é referida como "Princípio de D'Alembert" e é interpretada como um equilíbrio dinâmico da

partícula, e que permite tratar os problemas dinâmicos como se fossem estáticos. Considerando-se um sistema com (4.12) podemos escrever:

$$(\underline{P}_i + \underline{F}_i - m\ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (4.13)$$

Sabendo-se anteriormente que \underline{F}_i não realiza trabalho virtual, resulta:

$$(\underline{P}_i - m\ddot{\underline{r}}_i) \delta \underline{r}_i = 0 \quad (4.14)$$

que é o Princípio de D'Alembert generalizado ou Princípio dos Trabalhos Virtuais em dinâmica. O Princípio de D'Alembert é o princípio mais geral da mecânica e todos os outros, inclusive o Princípio de Hamilton, que mostraremos a seguir, deriva dele. Mas o seu inconveniente é que torna-se difícil a obtenção das equações do movimento através dele, e o Princípio de Hamilton a seguir, não tem este inconveniente.

4.3 - PRINCÍPIO DE HAMILTON

Aplicando-se o Princípio de D'Alembert a um sistema de N partículas de massa m_i , vem:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{P}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (4.15)$$

Considerando-se a relação:

$$\ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \frac{d}{dt} (\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) - \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \quad (4.16)$$

Multiplicando (4.16) por m_i e somando sobre todo o sistema, temos:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) - \sum_{i=1}^N m_i \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \quad (4.17)$$

De (4.15) sabe-se que

$$\sum_{i=1}^N \underline{p}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \delta w \quad (4.18)$$

e de (4.17) obtêm-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) = \delta T \quad (4.19)$$

onde T é a energia cinética do sistema de partículas. De (4.19), (4.18), (4.17) e (4.15) resulta:

$$\delta T + \delta w = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) \quad (4.20)$$

Agora passemos a considerar variações sobre o sistema. A configuração instantânea de um sistema é dado pelos valores das n coordenadas generalizadas que definem a posição do ponto no espaço n -dimensional ($n \leq 3N$). Esta configuração muda com o tempo traçando um caminho conhecido como "caminho dinâmico".

Uma variação deste caminho é obtida se em cada instante fizermos uma variação virtual $\delta \underline{r}_i$ na posição verdadeira. Entre todos os caminhos variados consideraremos apenas aqueles que coincidem com o caminho real nos instantes t_1 e t_2 , isto é:

$$\delta \underline{r}_i(t_1) = \delta \underline{r}_i(t_2) = 0 \quad (4.21)$$

Integrando a equação (4.20) entre os limites t_1 e t_2 , vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta w) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i \frac{d}{dt} (\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) dt = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \dots\dots (4.22)$$

Em presença da condição (4.21) resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta w) dt = 0 \quad (4.23)$$

No caso em que o trabalho virtual pode ser expresso como a variação do Lagrangeano, vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (4.24)$$

onde $L = T - V$.

A expressão (4.24) é denominada "Princípio de Hamilton". Este Princípio reduz o problema dinâmico à investigação de uma quantidade escalar, independente do sistema de coordenadas, e sua aplicação conduz às "equações do movimento".

O Princípio pode ser assim enunciado: "Entre dois instantes t_1 e t_2 existe um único caminho, dentre muitos em que o sistema pode se deslocar, cuja variação do Lagrangeano é nula".

APÊNDICE VMÉTODO DAS PARTES PROPORCIONAIS OU MÉTODO DAS CORDAS

Suponhamos que a função $f(x) = 0$ tenha uma raiz ξ no intervalo $[a, b]$ para o qual se tem

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad (5.1)$$

Para ilustrar a análise, tomemos:

$$f(a) < 0 \quad \text{e} \quad f(b) > 0 \quad (5.2)$$

Vamos dividir o intervalo na razão

$$-f(a), +f(b)$$

Obter-se-ã uma raiz aproximada

$$x_1 = a + h_1 \quad (5.3)$$

onde da figura (1) tiramos:

$$h_1 = - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a) \quad (5.4)$$

Aplicando-se esse mesmo artifício a um dos intervalos $[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$, o intervalo será aquele em cujos extremos a função $f(x)$ tem sinais contrários, obteremos x_2 , segunda aproximação da raiz, e assim sucessivamente.

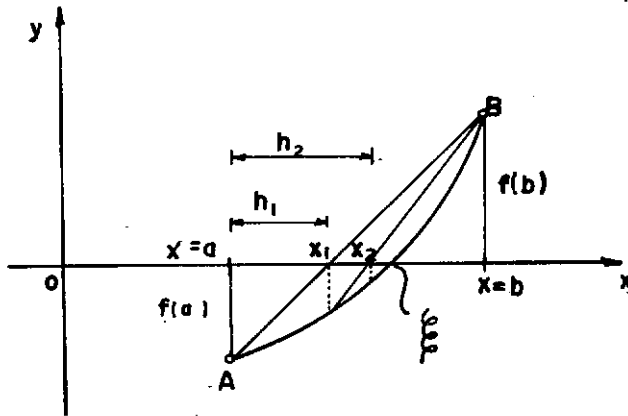


FIGURA (1)

No caso em que o extremo fixo é B (figura 1.) a fórmula de recorrência será:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} (b - x_n) \end{array} \right. \quad n=0, 1, 2, \dots$$

No caso em que o extremo fixo é A, a fórmula de recorrência será:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} (x_n - a) \end{array} \right.$$

APÊNDICE VI

ESPAÇO DE HILBERT

Definição: É um espaço euclidiano, separável, completo e de dimensão infinita.

Ou seja, um espaço de Hilbert é um conjunto H de elementos f, g, \dots de natureza arbitrária e que verifica as seguintes condições:

- I - H é um espaço euclidiano, isto é, um espaço linear com um produto escalar definido.
- II - O espaço H é completo no sentido da métrica

$$R(f, g) = \|f - g\|$$
- III - O espaço H é de dimensão infinita, isto é, qualquer que seja n se pode encontrar nele " n " elementos linearmente independentes.
- IV - H é separável, isto é, existe nele um conjunto numerável sempre denso, ou seja: cada elemento pode ser aproximado por uma sequência infinita.^[9]

APÊNDICE VII

MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Nos métodos numéricos pode-se destacar basicamente três grandes processos:

a) Método de Galerkin:

Parte para a resolução das equações de Euler-Lagrange, já minimizadas, com a adição das condições de contorno naturais e geométricas.

b) Método de Rayleigh-Ritz:

Faz a minimização direta do Lagrangeano e por isto é chamado de "método direto".

c) Método dos Elementos Finitos:

Pode ser considerado como sendo um caso particular do método de Rayleigh-Ritz e apresenta a mesma sistemática, ou seja, minimiza diretamente o Lagrangeano. Será discutida agora a questão sobre a abordagem numérica de um problema variacional. Em princípio, existem algumas ma

neiras, como já foi mostrado, em que um problema variacional pode ser proposto. O Método de Rayleigh-Ritz (*) ou de Ritz, como é mais conhecido, é somente um deles.

Basicamente, a idéia que se usou para resolver um certo problema variacional era a de transformar o problema em outro que envolvesse equações diferenciais ou mesmo um sistema de equações diferenciais.

Entretanto isto nem sempre é possível, uma vez que pode-se tornar muito complicado, pois o que se procura ao se resolver um problema variacional não é a solução da correspondente equação diferencial em uma vizinhança de um certo ponto como se faz na teoria das equações diferenciais e sim a solução em uma certa região D , de tal maneira que satisfaça no contorno de D certas restrições e que são as condições de contorno.

Das dificuldades surgidas provenientes da necessidade de se resolver o problema da maneira que foi proposto acima, deram origem a métodos variacionais conhecidos como método dos diretos e que não reduzem o problema a outro que envolva equações diferenciais.

(*) "Os dois físicos Lord Rayleigh e Walter Ritz conceberam independentemente o método que por simplicidade chamamos de Método de Ritz. Lord Rayleigh, em seu clássico trabalho "Theory of Sound" e em outras publicações, foi o primeiro a usar este método".

Os métodos diretos tem provado por outro lado serem úteis na teoria das equações diferenciais, já que se uma certa equação diferencial pode ser considerada como sendo a equação de Euler-Lagrange de um certo funcional, e se usar os métodos diretos para estabelecer a função extremante, prova-se a existência da solução para a equação diferencial dada e para as condições de contorno correspondentes ao funcional^[4].

7.1 - SEQUÊNCIAS MINIMIZANTES

Os métodos diretos estabelecem por um lado a existência da solução da equação diferencial ou equação de Euler-Lagrange e por outro proveem um meio para obter soluções aproximadas. Eles estão baseados, geralmente, em uma mesma idéia que é a seguinte:

Considera-se o problema de determinar o mínimo do funcional $F(\Phi)$ definido no espaço S de funções admissíveis Φ . Para que o problema tenha sentido supõe-se que em S existam funções Φ para as quais se tem $F(\Phi) < +\infty$ e mais ainda:

$$\inf F(\Phi) = d > -\infty \quad (7.1)$$

sendo o maior de todos os limites inferiores é tomado sobre todos os $\Phi \in S$. Seja $\hat{\Phi} \in S$ a solução do problema, ou seja:

$$F(\hat{\Phi}) = d \quad (7.2)$$

Pode-se construir uma função $\bar{\Phi}$, com $\bar{\Phi} \in S$, tal que o valor $F(\bar{\Phi})$ pode aproximar-se a mais possível de "d" e se poderá esperar que $\bar{\Phi}$ seja uma boa aproximação de $\hat{\Phi}$. Ainda mais, se existir uma sequência minimizante $\{\Phi_n\}$, $\Phi_n \in S$, isto é: uma se-

quência infinita de funções $\{\phi_n\} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$ e todas satisfazendo as condições de contorno de modo que permitem definir S , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\phi_n) = d \quad (7.3)$$

Se a sequência $\{\phi_n\}$ tem um limite $\tilde{\phi}$ e se é válido escrever

$$F(\tilde{\phi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\phi_n) \quad (7.4)$$

ou seja

$$F(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\phi_n) \quad (7.5)$$

Logo, tem-se:

$$F(\tilde{\phi}) = d \quad (7.6)$$

e se poderá esperar que esta sequência convirja de alguma maneira para a solução $\tilde{\phi}$.

Do ponto de vista prático interessa não tanto o problema da "existência" mas sim o da "construção" de tal sequência minimizante^[4].

Logo, para resolver um problema variacional via método direto deve-se:

- 1) construir uma sequência minimizante $\{\phi_n\}$
- 2) Provar que $\{\phi_n\}$ converge de alguma maneira para uma função $\tilde{\phi}$.

Praticamente todas as recentes investigações sobre a convergência de vários métodos diretos consiste em estabelecer um limite superior para a "distância" entre a solução exata e a solução aproximada. E a ferramenta mais efetiva nesta investigação é a obtida pela teoria dos operadores lineares nos espaços de Hilbert (ver Apendice VI).

7.2 - PRINCÍPIOS E ASPECTOS TEÓRICOS

A solução de um problema difícil de ser analisado é usualmente precedida de acordo com o seguinte esquema geral:

O dado problema P cuja solução é ψ pode ser substituído e relacionado com um problema P_n cuja solução é simplesmente ψ_n , e pode-se tomar como sendo um caso comparativo entre os dois problemas.

Melhorando a aproximação P_n para P , espera-se que ψ_n tende à solução desejada ψ de P .

O ponto fundamental da questão está na escolha da sequência convenientemente, embora seja uma solução aproximada.

Quando se tratar com problemas de "estabilidade do equilíbrio" e "de vibrações", estes são nada mais, nada menos formulados como sendo problemas de valor de contorno e problemas de auto-valores, respectivamente. Os problemas onde aparecem "cargas críticas de flambagem" são matematicamente formulados como sendo problemas de auto-valores.

Supõe-se que estejamos procurando o "mínimo" d de uma expressão variacional $F(\phi)$.

Comecemos com a minimização de

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots \quad (7.7)$$

Ou seja, é a sequência de funções admissíveis no nosso problema variacional e que satisfaça a condição (7.3).

A existência do limite inferior "d" é óbvia, e a existência da sequência minimizante (7.7) é então uma consequência lógica. O método de Ritz não é nada mais que uma receita para esta construção. E (7.7) fornece imediatamente uma aproximação para "d".

A construção de tal sequência se processa da seguinte forma:

Escolhe-se um conjunto de funções coordenadas arbitrárias

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad (7.8)$$

e terá que satisfazer duas condições:

a) uma combinação linear

$$\Phi_n = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad (7.9)$$

para ser admissível num problema variacional.

b) Terão que formar um conjunto completo de funções no sentido de que uma função admissível Φ e suas derivadas podem ser aproximadas com certo grau de precisão por uma combinação linear das funções coordenadas e das suas correspondentes derivadas, respectivamente.

É claro que neste conjunto de funções coordenadas para valores de " n " suficientemente grandes e para uma escolha conveniente dos coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n de (7.9) pode-se encontrar funções admissíveis ϕ_n para os quais $F(\phi_n)$ difere, arbitrariamente, um infinitésimo de " d ".

Em outras palavras, é possível achar uma sequência minimizante $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ tal que seja uma sequência de combinações lineares das funções coordenadas. Em regra, para se obter esta tal sequência minimizante escolhe-se os " a_i " da seguinte maneira:

Consideremos uma função ϕ_n definida por (7.9) e a substituimos no nosso problema variacional $F(\phi_n)$. Ela passará a ser uma função $I(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de " n " parâmetros " a_i ", e passa a ser um problema ordinário do cálculo, ou seja:

$$F(\phi_n) = I(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{Mínimo} \quad (7.10)$$

No nosso problema $F(\phi_n)$ é uma função quadrática ou bi-linear, e (7.10) nos levará a um sistema de " n " equações lineares, tantos quantos forem o número de parâmetros e que se consegue fazendo

$$\frac{\partial I}{\partial a_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (7.11)$$

Determinados os a_n parâmetros a sequência minimizante $\phi_n (n=1, 2, \dots)$ fica conhecida.

Uma investigação comparativa^[4] de diferentes tipos de problemas variacionais revela que, de modo geral, a convergência de uma sequência minimizante $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, e a sequên

cia de derivadas de Φ_n é melhorada se a ordem e ocorrência das derivadas se torna elevada.

Em outras palavras, há uma tendência a piorar a convergência com o número de variáveis independentes aumentando. No caso em que o problema estudado é membrana pode aparecer problemas de convergência. Para estes casos no método de Rayleigh-Ritz faz-se o seguinte artifício: em vez de considerar simplesmente o problema variacional associado ao correspondente problemas de valor de contorno, modifica-se a forma do problema sem trocar a solução deste último e adiciona-se termos de ordem superior à expressão variacional original e que depois desaparecem não interferindo na solução.

7.3 - PONTO DE VISTA PRÁTICO

Do ponto de vista prático todo sucesso depende do problema variacional em si, como também da escolha das funções coordenadas. Em geral a escolha deve ser feita tendo em conta o tipo de problema em estudo e o condicionamento numérico do sistema de equações. Estudos tem mostrado que são em grande número os problemas em que polinômios algébricos ou trigonométricos empregados deram resultados altamente satisfatórios. É bom ressaltar que neste estudo houve um certo problema em relação à convergência quando se utilizou aproximações do tipo polinomial. Analogamente à referência [17] se constatou que a convergência da solução para os deslocamentos se fazia mais rapidamente que para as rotações. Por este motivo se optou pelo uso de soluções do tipo trigonométricas. É importante que a função inicial já

tenha uma boa aproximação e que as funções subsequentes $\phi_2, \phi_3 \dots$ sejam diferentes o suficiente a ponto de se ter uma melhora na aproximação quando houver um incremento do número de termos.

7.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Para condições de contorno rígidos a aproximação pelo método de Ritz é relativamente boa. Um número relativamente pequeno de funções coordenadas é suficiente para produzir um resultado próximo da solução desejada. Para contornos livre e condições de contorno naturais a escolha das funções coordenadas é fácil visto que as condições para o contorno não precisam ser antes estipulados. O método de Ritz é vantajoso porque ele obriga que as sequências satisfaçam somente as condições de contorno "geométricas" do problema, e prova-se^[4] que o método converge para a solução exata e que também satisfaz as condições de contorno "naturais".

7.5 - ESTIMATIVA DA PRECISÃO DO MÉTODO

Um ponto fraco no método de Ritz é que ele não contém como princípio a estimativa da precisão da aproximação, em outras palavras a estimativa do erro. Para problemas de estabilidade do equilíbrio a avaliação para o mínimo "d" pode ser obtida pelo método sugerido pelo princípio de Castigliano da Teoria da Elasticidade^[4]. A idéia matemática é a representação do mínimo valor "d" de um dado problema variacional com o máximo valor de outro problema variacional^[5]. O valor prático desta aproximação não parece grande desde que o valor de "d" nos problemas de equi

líbrio é de pouco interesse^[6]. No caso de vibrações, onde os valores mínimos, como frequências ao quadrado, são de considerável importância, os métodos para a estimativa da precisão são em geral menos satisfatórios.

7.6 - OBJEÇÕES AO MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Assim como a precisão da aproximação obtida é uma das objeções ao método de Rayleigh-Ritz, a escolha conveniente das funções coordenadas também o é, resultando invariavelmente na utilização de computadores digitais.

APÊNDICE VIIIANÁLISE NUMÉRICA8.1.- FINALIDADE

Em virtude da necessidade de se ter que utilizar métodos numéricos na resolução das equações variacionais (4.12) e (4.13) introduziremos aqui o capítulo de "Análise Numérica", que diz respeito à parte referente a utilização de computadores digitais através de um programa automático. A finalidade do presente programa é analisar a estabilidade lateral de hastes armadas em seus dois casos (Caso I, Caso II) e com as duas condições de contorno ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$).

Sairão como resultado os parâmetros adimensionais e o histórico das frequências de vibração sob o estado de carregamento.

8.2 - DESCRIÇÃO DAS SUB-ROTINAS DO PROGRAMA

SUB-ROTINA MOV - Esta sub-rotina monta a matriz de Massa, \underline{A} , para as duas condições de contorno.

SUB-ROTINA RIG - Esta sub-rotina monta a matriz de Rigidez, \underline{B} , devido à flexão, torção e empenamento para as duas condições de contorno.

SUB-ROTINA MOLA I - Esta sub-rotina monta a matriz de Rigidez, \underline{MM} , devido a mola de torção KI (Caso I) para as duas

condições de contorno. Adicionando-se \underline{MM} a \underline{B} , ter-se-ã a rigidez total da estrutura no Caso I.

SUB-ROTINA MOLLA 2 - Esta sub-rotina monta a matriz de Rigidez \underline{MM} , devido as molas de torção K_1 e K_2 (Caso II), para as duas condições de contorno. Adicionando-se \underline{MM} a \underline{B} , ter-se-ã a rigidez total da estrutura no Caso II.

SUB-ROTINA NAXIAL - Esta sub-rotina monta a matriz de Carregamento, \underline{CN} , devido ao trabalho realizado pelo esforço de compressão N na haste, para as duas condições de contorno.

SUB-ROTINA CARGA 1 - Esta sub-rotina monta a matriz de Carregamento, \underline{CC} , devido aos trabalhos realizados pela solicitação externa P, e pela reação do montante T, na haste (Caso I) para as duas condições de contorno.

SUB-ROTINA CARGA 2 - Esta sub-rotina monta a matriz de Carregamento, \underline{CC} , devido aos trabalhos realizados pela solicitação externa P, e pela reação do montante T, na haste (Caso II) para as duas condições de contorno.

SUB-ROTINA DETEC 1 - Esta sub-rotina detecta os parâmetros críticos no Caso I, por meio do processo iterativo "Método das Partes Proporcionais ou Método das Cordas", (ver Apêndice V), com a precisão que se deseja através da variável ERROR.

SUB-ROTINA DETEC 2 - Esta sub-rotina detecta os parâmetros críticos no Caso II, análogo ao processo utilizado em DETEC 1.

SUB-ROTINA REAUVA - Esta sub-rotina resolve o problema de auto valores posto na forma:

$$\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{B} \underline{x}$$

onde:

\underline{A} , \underline{B} são matrizes

\underline{x} auto vetor

λ auto valor

O método utilizado é o "Método das Rotações Simultâneas de Jacobi.

8.3. DESCRIÇÃO DOS PARÂMETROS DE ENTRADA

NP - Variável que no final da análise de uma estrutura indica se ainda existe alguma outra a ser analisada. Se NP for zero indica que não há nada mais a analisar. Se NP for igual a um indica que o processo deverá começar de novo com a análise de uma nova estrutura.

NE - número da estrutura a ser analisada.

N - número de termos que se deseja que tenha a função de interpolação para os deslocamentos.

M - número de termos que se deseja que tenha a função de interpolação para as rotações.

E - módulo de elasticidade, ou módulo de Young.

G - módulo de elasticidade transversal.

C_w - constante de empenamento

C_T - constante de torção

I_x - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo x .

I_y - momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y .

EY - distância entre o centro de gravidade (CG) e o centro de cisalhamento (CC). Se CC estiver acima do CG $\rightarrow EY > 0$ e se CC estiver abaixo do CG $\rightarrow EY < 0$.

AA - área da seção transversal da haste.

DA - distância entre o centro de cisalhamento e a borda superior.

DB - distância entre o centro de cisalhamento e a borda inferior.

H - altura do montante.

ZP - abscissa do ponto de aplicação da solicitação externa.

ZT - abscissa da posição do montante, $ZT = ZP$.

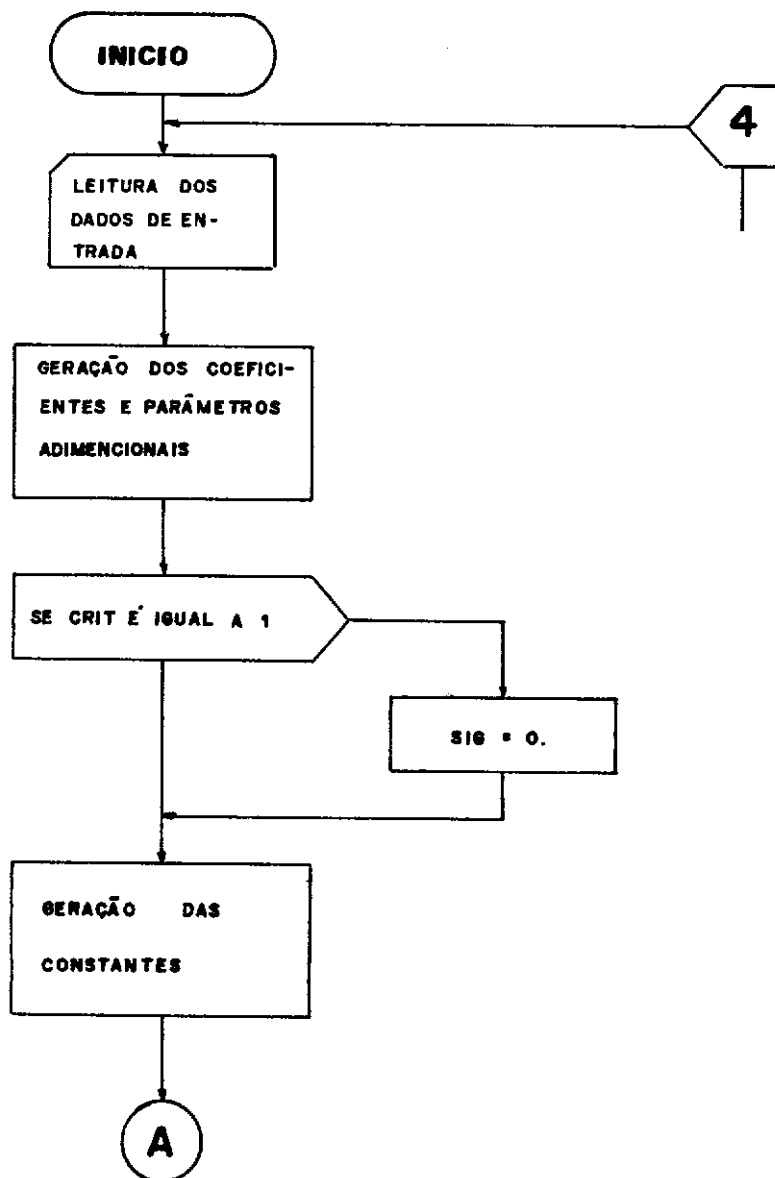
ZL - comprimento da haste.

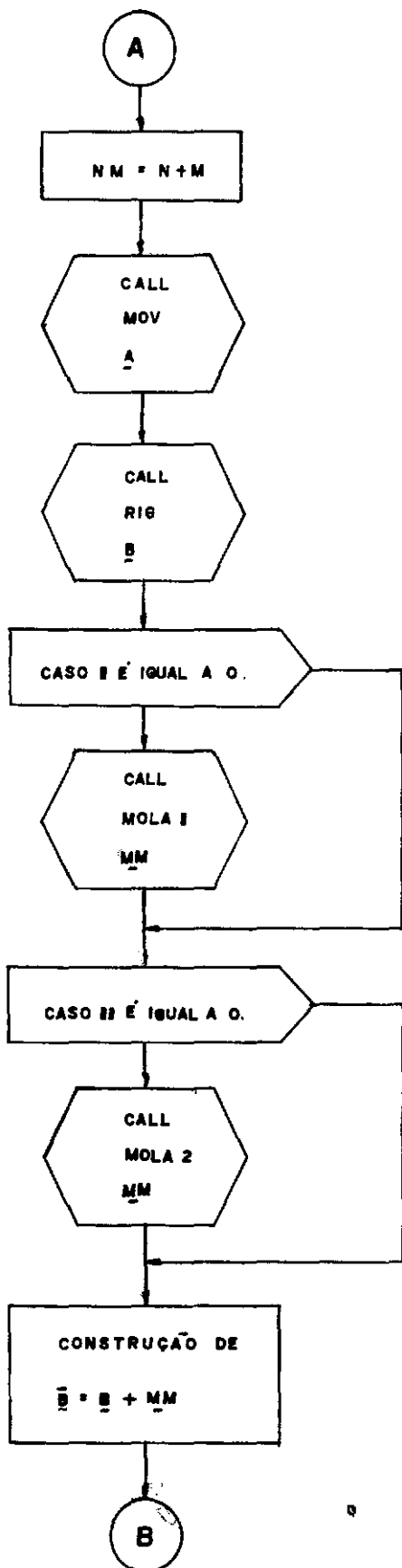
K_1 - constante torção da mola K_1 .

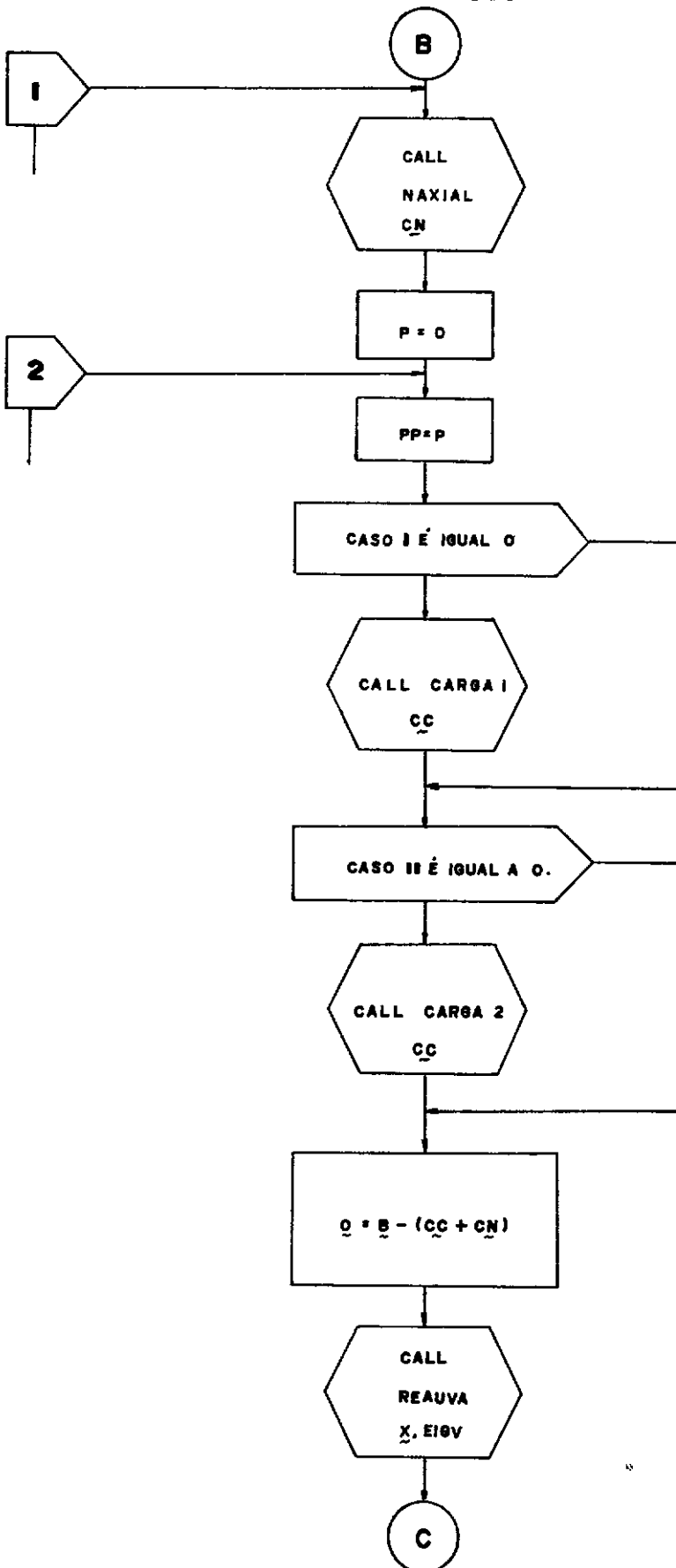
K_2 - constante de torção da mola K_2 .

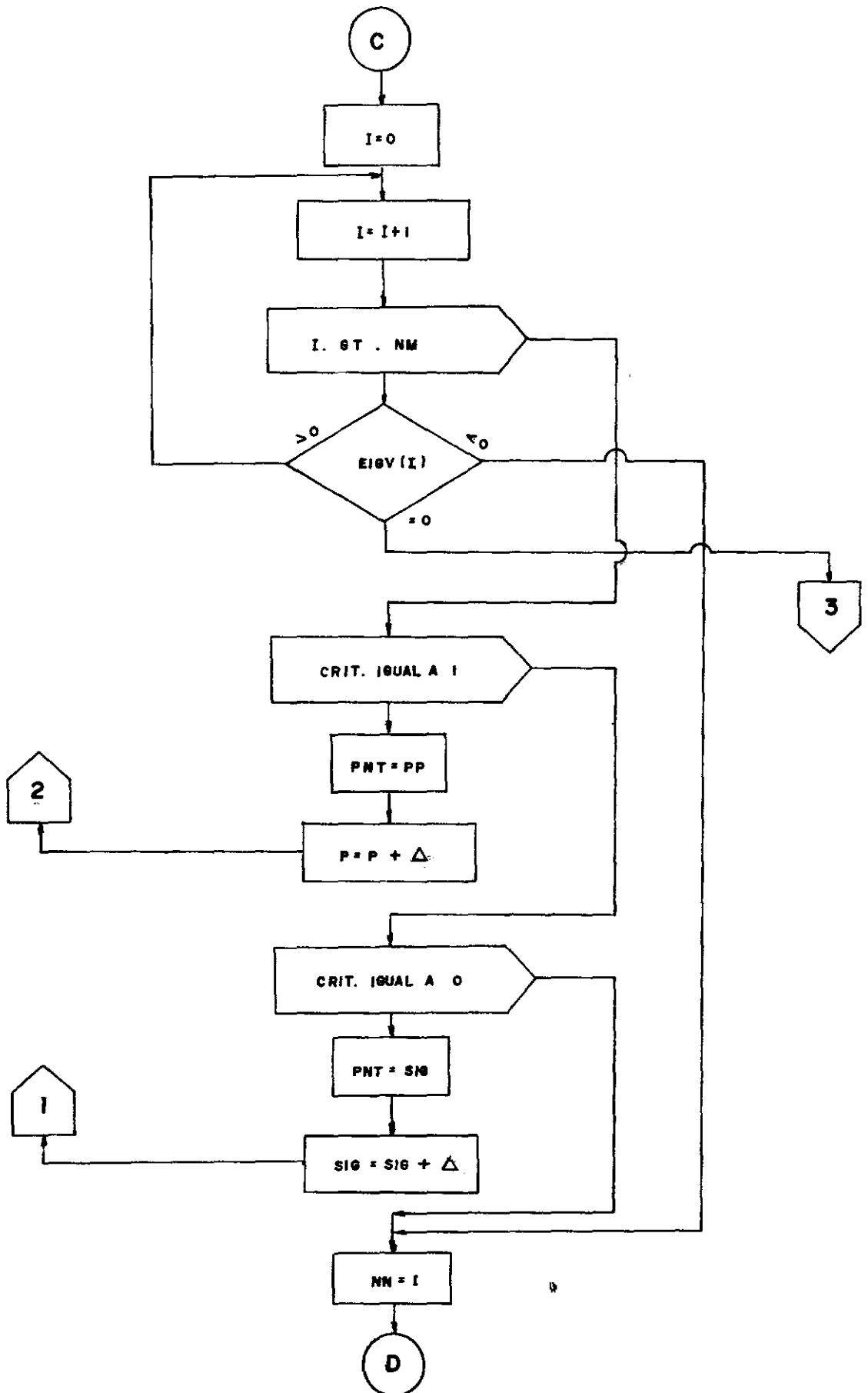
T_0 - solicitação no cabo.

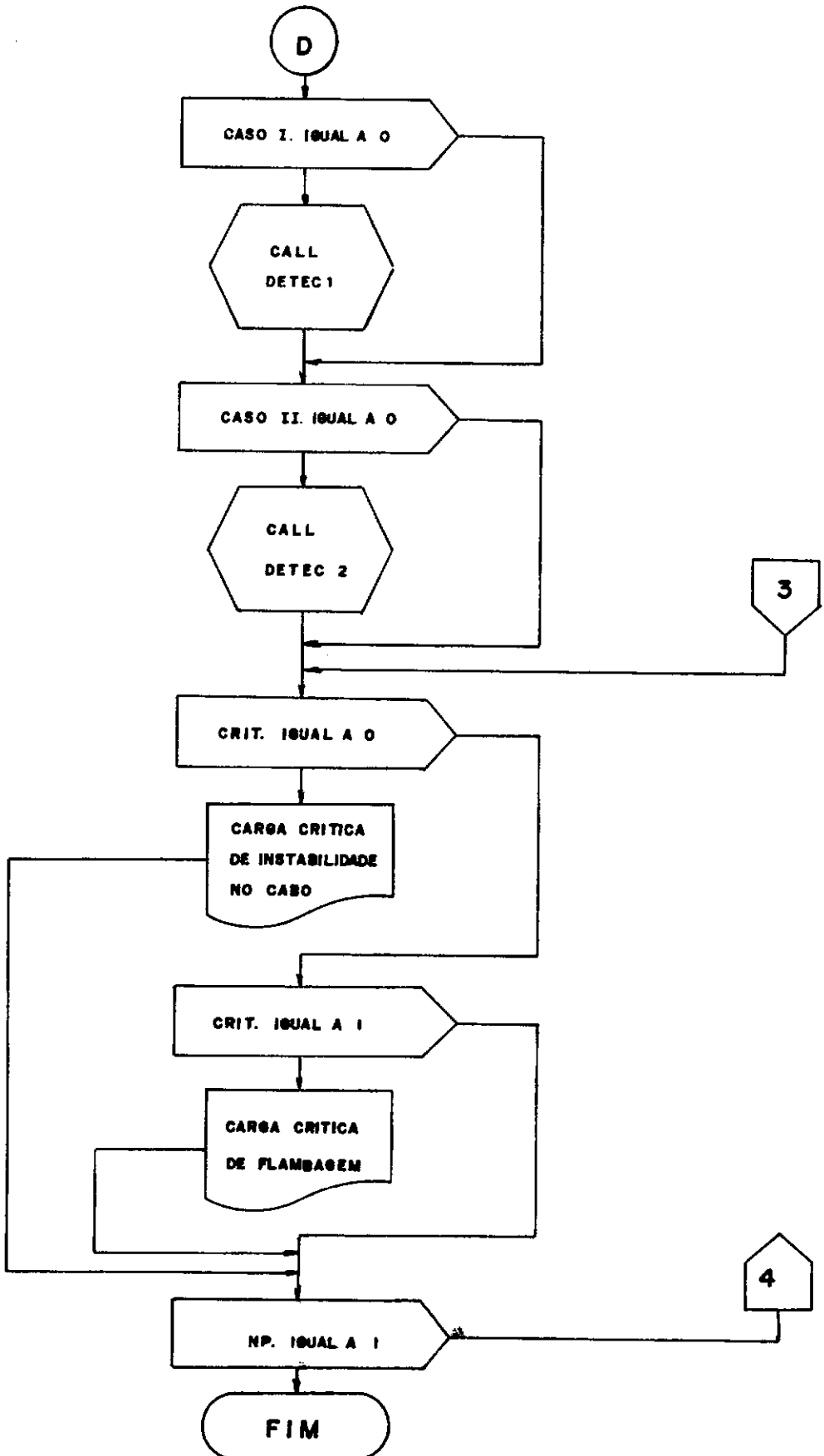
- ENGST1 - restrição com relação à torção em uma extremidade
 ENGST1 = 1 restrição ativa
 ENGST1 = 0 outra situação
- ENGST2 - restrição com relação à torção nas duas extremidades
 ENGST2 = 1 restrição ativa
 ENGST2 = 0 outra situação
- CASO I - indica que o caso a ser estudado é o não conservativo, Caso II = 0.
- CASO II - indica que o caso a ser estudado é o conservativo, Caso I = 0.
- CRIT = 1 - indica que se quer determinar qual o parâmetro de carga crítico no cabo que provoca a instabilidade, sem a solicitação externa P. Se CRIT = 0, se quer determinar qual o parâmetro de carga da solicitação externa P que provoca a instabilidade na estrutura para uma dada solicitação no cabo.
- P DELTA - é incremento que se deve dar a P na pesquisa de seu parâmetro crítico.
- T DELTA - é o incremento que se deve dar a SIG na pesquisa de seu parâmetro crítico.

8.4- **DIAGRAMA DE BLOCO DO PROGRAMA PRINCIPAL**









8.5 - MANUAL DE ENTRADA DE DADOS

Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATO
1	NP , NE , N, M	4 1 5
1	E, G, CW, CT, IX, IY, EY	7 E 10.5
1	AA, DA, DB, H, ZP, ZL	6 E 10.5
1	K1, K2, TO	3 E 10.5
	ENGST1, ENGST 2	2 1 5
1	CASO I, CASO II, CRIT	3 1 5
	P DELTA , T DELTA	2 E 10.5

8.6 - LISTAGEM DO PROGRAMA

SUBROUTINE MOV(N, M, A1, A2, A3, ENGST1, ENGST2, A)

```

C
C ===ESTA SUB-ROTINA MONTA A MATRIZ DO MOVIMENTO OU
C   MATRIZ DE MASSA===
C
C ===FUNCAO DE APRXIMACAO DO TIPO SERIE TRIGONOMETRICA===
C   IMPLICIT REAL *3(A-H,O-Z)
C   DIMENSION A(50,50)
C   NM=N+M
C   ===ZERAGEM DA MATRIZ===
C   DO 100 J=1, NM
C   DO 100 K=1, NM
100 A(J,K)=0.
C   UM=1.
C   PI=4.*DATAN(UM)
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS===
C   DO 110 J=1, N
110 A(J,J)=A1
C   ===RESTRICAO A TORCAO NAS DUAS EXTREMIDADES===
C   IF(ENGST2.EQ.0) GO TO 140
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
C   DO 120 J=1, N
C   JJ=J+N
C   A(J,JJ)=A2
120 A(JJ,J)=A2
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
C   DO 130 J=1, M
C   JJ=J+N

```

```

130 A(JJ,JJ)=A3
C   ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
140 IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 180
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 150 J=1,N
      DO 150 K=1,M
      KK=N+K
      AUX=(K-J+.5)*PI
      PAR=(K+J-.5)*PI
150  A(J,KK)=2*A2*(DSIN(AUX)/(2*AUX)-DSIN(PAR)/(2*PAR))
      DO 160 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 160 K=1,N
160  A(JJ,K)=A(K,JJ)
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 170 J=1,M
      JJ=N+J
170  A(JJ,JJ)=A3
180  CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RIG(N,M,B1,B2,B3,ENGST1,ENGST2,B)
C
C   ===ESTA SUB-ROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ===
C
C   ===FUNCAO DE APROXIMACAO DO TIPO SERIE TRIGONOMETRICA===
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      DIMENSION B(50,50)
      NM=N+M
C   ===ZERAGEM DA MATRIZ===
      DO 100 J=1,NM

      DO 100 K=1,NM
100  B(J,K)=0.
      UM=1.
      PI=4.*DATAN(UM)
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS--RIGIDEZ A FLEXAO===
      DO 110 J=1,N
110  B(J,J)=B1*(J**4)*(PI**4)
C   ===RESTRICAO A TORCAO NAS DUAS EXTREMIDADES===
      IF(ENGST2.EQ.0) GO TO 130
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES--TORCAO E EMPENAMENTO===
      DO 120 J=1,M
      JJ=N+J
120  B(JJ,JJ)=B2*(J**2)*(PI**2)+B3*(J**4)*(PI**4)
C   ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
130  IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 150
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES--TORCAO E EMPENAMENTO===
      DO 140 J=1,M
      JJ=N+J
140  B(JJ,JJ)=B2*(((2*J-1)*PI/2. )**2)+B3*(((2*J-1)*PI/2. )**4)
150  RETURN
      END
      SUBROUTINE MOLAI(N,M,K1,ENGST1,MM)
C
C   ===ESTA SUB-ROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ REFERENTE A
C   ===MOLA DE TORCAO K1 -- CASO I===
C
C   ===FUNCAO DE APROXIMACAO DO TIPO SERIE TRIGONOMETRICA===
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      REAL *8 K1,MM(50,50)

```

```

C   ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
      IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 120
      NM=N+M
      POS=1.
      UM=1.
      PI=4.*DATAN(UM)
C   ===ZERAGEM DA MATRIZ===
      DO 100 J=1,NM
      DO 100 K=1,NM
100  MM(J,K)=0.
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 110 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 110 K=1,M
      KK=N+K
110  MM(JJ,KK)=2*K1*(DSIN((2*J-1)*(PI/2.)*POS)*DSIN((2*K-1)*
      1(PI/2.)*POS))
120  CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE MOLA2(N,M,C1,C2,C3,K1,K2,FIT,ENGST1,ENGST2,MM)
C
C   ===ESTA SUB-ROTINA MONTA A MATRIZ DE RIGIDEZ REFER ENTE AS
C   ===MOLAS DE TORCAO K1 E K2 -- CASOII ===
C
C   ===FUNCAO DE APROXIMACAO DO TIPO TRIGONOMETRICA===
      IMPLICIT REAL *3(A-H,O-Z)
      REAL *8 K1,K2,MM(50,50),M1(50,50),M2(50,50)
      NM=N+M
      POS=1.
      UM=1.

      PI=4.*DATAN(UM)
C   ===ZERAGEM DAS MATRIZES===
      DO 100 J=1,NM
      DO 100 K=1,NM
      M1(J,K)=0.
      M2(J,K)=0.
100  MM(J,K)=0.
C   ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
      IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 120
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 110 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 110 K=1,M
      KK=N+K
110  M1(JJ,KK)=2*K1*(DSIN((2*J-1)*(PI/2.)*POS)*DSIN((2*K-1)*
C      1(PI/2.)*POS))
120  CONTINUE
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS===
      DO 130 J=1,N
      DO 130 K=1,N
130  M2(J,K)=K2*C1*(JSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))
C   ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
      IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 170
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 140 J=1,N
      DO 140 K=1,M
      KK=N+K
140  M2(J,KK)=K2*C2*(DSIN((2*J-1)*(PI/2.)*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))

```

```

      DO 150 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 150 K=1,N
150 M2(JJ,K)=M2(K,JJ)
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 160 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 160 K=1,M
      KK=N+K
160 M2(JJ,KK)=K2*C3*(DSIN((2*J-1)*(PI/2.)*FIT)*DSIN((2*K-1)*
C   1*(PI/2.)*FIT))
C   ===RESTRICAO A TORCAO NAS DUAS EXTREMIDADES===
170 IF(ENGST2.EQ.0) GO TO 210
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 180 J=1,N
      DO 180 K=1,M
      KK=N+K
180 M2(J,KK)=K2*C2*(DSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))
      DO 190 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 190 K=1,N
190 M2(JJ,K)=M2(K,JJ)
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 200 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 200 K=1,M
      KK=N+K
200 M2(JJ,KK)=K2*C3*(DSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))
210 CONTINUE
C   ===SOMA DAS CONTRIBUICOES DE K1 E K2===

      DO 220 J=1,NM
      DO 220 K=1,NM
220 MM(J,K)=M1(J,K)+M2(J,K)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE NAXIAL(N,M,SIG,KAPA,D1,ENGST1,ENGST2,CN)
C
C   ===ESTA SUB-ROTINA MONTA A MATRIZ DEVIDO AO TRABALHO REALIZADO
C   PELO ESFORCO AXIAL DE COMPRESSAO NA HASTE===
C
C   ===FUNCAO DE APROXIMACAO DO TIPO SERIE TRIGONOMETRICA===
      IMPLICIT REAL *3(A-H,O-Z)
      DIMENSION CN(50,50)
      REAL *8 KAPA
      NM=N+M
      UM=1.
      PI=4.*DATAN(UM)
C   ===ZERAGEM DA MATRIZ===
      DO 100 J=1,NM
      DO 100 K=1,NM
100 CN(J,K)=0.
      SUP=1.
      INF=0.
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS===
      DO 110 J=1,N
110 CN(J,J)=SIG*D1*((J*PI)**2)
C   ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
      IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 150
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===

```



```

      DO 120 J=1,N
      DO 120 K=1,M
      KK=N+K
      AUX=(K-J+.5)*PI
      PAR=(K+J-.5)*PI
120  CN(J,KK)=SIG*KAPA*4*D1*(PI**2)*J*(2*J-1)*(DSIN(AUX*SUP)/
C    1(2*AUX)+DSIN(PAR*SUP)/(2*PAR)-DSIN(AUX*INF)/(1*AUX)-
C    2DSIN(PAR*INF)/(2*PAR))
      DO 130 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 130 K=1,N
130  CN(JJ,K)=CN(K,JJ)
C    ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 140 J=1,M
      JJ=N+J
140  CN(JJ,JJ)=SIG*(KAPA**2)*D1*(((2*J-1)*(PI/2.))**2)
C    ===RESTRICAO A TORCAO NAS DUAS EXTREMIDADES===
150  IF(ENGST2.EQ.0) GO TO 190
C    ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 160 J=1,N
      JJ=N+J
160  CN(J,JJ)=SIG*KAPA*D1*((J*PI)**2)
      DO 170 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 170 K=1,N
170  CN(JJ,K)=CN(K,JJ)
C    ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 180 J=1,M
      JJ=N+J

180  CN(JJ,JJ)=SIG*(KAPA**2)*D1*((J*PI)**2)
190  RETURN
      END
      SUBROUTINE CARGAL(N,M,FIP,SIG,CK,GAMA,PP,ENGST1,ENGST2,CC)
C
C    ESTA SUB-ROTINA MONTA A MATRIZ DEVIDO AO TRABALHO
C    REALIZADO POR T (REACAO DO MONTANTE NA HASTE) E POR
C    P (ACAO EXTERNA) - CASOI
C
C    ===FUNCAO DE INTERPOLACAO DO TIPO SERIE TRIGONOMETRICA===
      IMPLICIT REAL *3(A-H,O-Z)
      DIMENSION CC(50,50)
      SUP=1.
      INF=0.
      NM=N+M
      P1=(PP-SIG*CK)*(1-FIP)
      P2=(PP-SIG*CK)*(FIP)
C    ===ZERAGEM DA MATRIZ===
      DO 100 J=1,NM
      DO 100 K=1,NM
100  CC(J,K)=0.
      UM=1.
      PI=4.*DATAN(UM)
C    ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
      IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 140
C    ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 110 J=1,N
      DO 110 K=1,M
      KK=N+K

```

```

      AUX=(K-J+.5)*PI
      PAR=(K+J-.5)*PI
110 CC(J, KK)=-SIG*CK*(DSIN(K*PI*FIT)*DSIN((2*J-1)*(PI/2.)*FIT))
C
      1-P1*((J*PI)**2)/2.*((DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)+FIP*DSIN(AUX*F
C
      2IP)/AUX-DCOS(AUX*INF)/(AUX**2)-INF*DSIN(AUX*INF)/AUX)-(DCOS
C
      3(PAR*FIP)/(PAR**2)+FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR-DCOS(PAR*INF)/(PAR
C
      4**2)-INF*DSIN(PAR*INF)/PAR))-P2*((J*PI)**2)*(DSIN(AUX*SUP)/
C
      5(2*AUX)-DSIN(PAR*SUP)/(2*PAR)-DSIN(AUX*FIP)/(2*AUX)+DSIN
C
      6(PAR*FIP)/(2*PAR))+P2*((J*PI)**2)/2.*((DCOS(AUX*SUP)/(AUX
C
      7**2)+SUP*DSIN(AUX*SUP)/AUX-DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)-FIP*DSIN
C
      8(AUX*FIP)/AUX)-(DCOS(PAR*SUP)/(PAR**2)+SUP*DSIN(PAR*SUP)/
C
      9PAR-DCOS(PAR*FIP)/(PAR**2)-FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR))
      DO 120 J=1, M
      JJ=N+J
      DO 120 K=1, N
120 CC(JJ, K)=CC(K, JJ)
C ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 130 J=1, M
      JJ=N+J
      DO 130 K=1, M
      KK=N+K
      F=2*J-1

      T=2*K-1
130 CC(JJ, KK)=(PP*GAMA)*(DSIN(F*(PI/2.)*FIP)*DSIN(T*(PI/2.)*FIP
C
      1))-(SIG*CK*ETA)*(DSIN(F*(PI/2.)*FIT)*DSIN(T*(PI/2.)*FIT))
C ===RESTRICAO A TORCAO NAS DUAS EXTREMIDADES===
140 IF(ENGST2.EQ.0) GO TO 190
C ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 150 J=1, N
      DO 150 K=1, M
      KK=N+K
      IF(J.EQ.K) GO TO 160
      AUX=(K-J)*PI
      PAR=(K+J)*PI
      CC(J, KK)=-SIG*CK*(DSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))-P1*((J*PI)
C
      1**2)/2.*((DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)+FIP*DSIN(AUX*FIP)/AUX-DCOS
C
      2(AUX*INF)/(AUX**2)-INF*DSIN(AUX*INF)/AUX)-(DCOS(PAR*FIP)/(
C
      3PAR**2)+FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR-DCOS(PAR*INF)/(PAR**2)-INF*
C
      4DSIN(PAR*INF)/PAR))-P2*((J*PI)**2)*(DSIN(AUX*SUP)/(2*AUX)-
C
      5DSIN(PAR*SUP)/(2*PAR)-DSIN(AUX*FIP)/(2*AUX)+DSIN(PAR*FIP)/
C
      6(2*PAR))+P2*((J*PI)**2)/2.*((DCOS(AUX*SUP)/(AUX**2)+SUP*
C
      7DSIN(AUX*SUP)/AUX-DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)-FIP*DSIN(AUX*FIP)

```

```

      8/AUX)-(DCOS(PAR*SUP)/(PAR**2)+SUP*DSIN(PAR*SUP)/PAR-DCOS(
C      9PAR*FIP)/(PAR**2)-FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR))
      GO TO 150
160 CC(J, KK)=-SIG*C*(DSIN(J*PI*FIT))**2-P1*((J*PI)**2)*(FIP**
C      12/4.-FIP*DSIN(2*J*PI*FIP)/(4*J*PI)-DCOS(2*J*PI*FIP)/(8*(J*
C      2PI)**2)-INF**2/4.+INF*DSIN(2*J*PI*INF)/(4*J*PI)+DCOS(2*J*PI
C      3*INF)/(8*(J*PI)**2))-P2*((J*PI)**2)*(SUP/2.-DSIN(2*J*PI*SUP
C      4)/(4*J*PI)-FIP/2.+DSIN(2*J*PI*FIP)/(4*J*PI))+P2*((J*PI)**2)
C      5*(SUP**2/4.-SUP*DSIN(2*J*PI*SUP)/(4*J*PI)-DCOS(2*J*PI*SUP)/
C      6(8*(J*PI)**2)-FIP**2/4.+FIP*DSIN(2*J*PI*FIP)/(4*J*PI)+DCOS
C      7(2*J*PI*FIP)/(8*(J*PI)**2))
150 CONTINUE
      DO 170 J=1, M
        JJ=N+J
        DO 170 K=1, N
170 CC(JJ, K)=CC(K, JJ)
C    ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 180 J=1, M
        JJ=J+N
        DO 180 K=1, M
          KK=K+N
180 CC(JJ, KK)=(PP*GAMA)*(DSIN(J*PI*FIP)*DSIN(K*PI*FIP))-(SIG*
C      1CK*ETA)*(DSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))
190 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CARGA2(N, M, T1, T2, T3, FIP, SIG, GAMA, PP, ENGST1,
      LENGST2, CC)
C
C      ESTA SUB-ROTINA MONTA A MATRIZ DEVIDO AO TRABALHO
C      REALIZADO POR T (REACAO DO MONTANTE NA HASTE) E POR
C      P (ACAO EXTERNA) - CASO II
C    ===FUNCAO DE INTERPOLACAO DO TIPO SERIE TRIGONOMETRICA===
      IMPLICIT REAL *3(A-H, O-Z)
      DIMENSION CC(50, 50)
      SUP=1.
      INF=0.
      FIT=FIP
      NM=N+M
      P1=PP*(1-FIP)
      P2=PP*FIP
C    ===ZERAGEM DA MATRIZ===
      DO 100 J=1, NM
        DO 100 K=1, NM
100 CC(J, K)=0.
      UM=1.
      PI=4.*DATAN(UM)
C    ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS===
      DO 110 J=1, N
        DO 110 K=1, N
110 CC(J, K)=SIG*T1*(DSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))

```

```

C   ===RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE===
      IF(ENGST1.EQ.0) GO TO 150
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 120 J=1,N
      DO 120 K=1,M
      PAR=(K+J-.5)*PI
120  CC(J,KK)=SIG*T2*(DSIN(K*PI*FIT)*DSIN((2*J-1)*(PI/2.)*FIT))
C
      1-PI*((J*PI)**2)/2.*((DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)+FIP*DSIN(AUX*
C
      2FIP)/AUX-DCOS(AUX*INF)/(AUX**2)-INF*DSIN(AUX*INF)/AUX)-(
C
      3DCOS(PAR*FIP)/(PAR**2)+FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR-DCOS(PAR*INF)/
C
      4(PAR**2)-INF*DSIN(PAR*INF)/PAR))-P2*((J*PI)**2)*(DSIN(AUX*
C
      5SUP)/(2*AUX)-DSIN(PAR*SUP)/(2*PAR)-DSIN(AUX*FIP)/(2*AUX)+
C
      6DSIN(PAR*FIP)/(2*PAR))+P2*((J*PI)**2)/2.*((DCOS(AUX*SUP)/
C
      7(AUX**2)+SUP*DSIN(AUX*SUP)/AUX-DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)-FIP*
C
      8DSIN(AUX*FIP)/AUX)-(DCOS(PAR*SUP)/(PAR**2)+SUP*DSIN(PAR*SUP
C
      9)/PAR-DCOS(PAR*FIP)/(PAR**2)-FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR))
      DO 130 J=1,M
      JJ=N+J
      DO 130 K=1,N
130  CC(JJ,K)=CC(K,JJ)
C   ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 140 J=1,M

      JJ=N+J
      DO 140 K=1,M
      KK=N+K
      F=2*J-1
      T=2*K-1
140  CC(JJ,KK)=SIG*T3*(DSIN(F*(PI/2.)*FIT)*DSIN(T*(PI/2.)*FIT))
C
      1+PP*GAMA*(DSIN(F*(PI/2.)*FIP)*DSIN(T*(PI/2.)*FIP))
C   ===RESTRICAO A TORCAO NAS DUAS EXTREMIDADES===
150  IF(ENGST2.EQ.0) GO TO 200
C   ===PARCELA REFERENTE A DESLOCAMENTOS E ROTACOES===
      DO 160 J=1,N
      DO 160 K=1,M
      KK=N+K
      IF(J.EQ.K) GO TO 170
      AUX=(K-J)*PI
      PAR=(K+J)*PI
      CC(J,KK)=SIG*T2*(DSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))-P1*((J*PI)
C
      1**2)/2.*((DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)+FIP*DSIN(AUX*FIP)/AUX-DCOS
C
      2(AUX*INF)/(AUX**2)-INF*DSIN(AUX*INF)/AUX)-(DCOS(PAR*FIP)/
C
      3(PAR**2)+FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR-DCOS(PAR*INF)/(PAR**2)-INF*
C
      4DSIN(PAR*INF)/PAR))-P2*((J*PI)**2)*(DSIN(AUX*SUP)/(2*AUX)-
C
      5DSIN(PAR*SUP)/(2*PAR)-DSIN(AUX*FIP)/(2*AUX)+DSIN(PAR*FIP)/

```

```

C      6(2*PAR))+P2*((J*PI)**2)/2.)*(DCOS(AUX*SUP)/(AUX**2)+SUP*
C      7DSIN(AUX*SUP)/AJX-DCOS(AUX*FIP)/(AUX**2)-FIP*DSIN(AUX*FIP)/
C      8AUX)-(DCOS(PAR*SUP)/(PAR**2)+SUP*DSIN(PAR*SUP)/PAR-DCOS(PAR
C      9*FIP)/(PAR**2)-FIP*DSIN(PAR*FIP)/PAR))
      GO TO 160
170 CC(J, KK)=SIG*T2*(DSIN(J*PI*FIT))**2-P1*((J*PI)**2)*(FIP**2
C      1/4.-FIP*DSIN(2*J*PI*FIP)/(4*J*PI)-DCOS(2*J*PI*FIP)/(8*(J*PI
C      2)**2)-INF**2/4.+INF*DSIN(2*J*PI*INF)/(4*J*PI)+DCOS(2*J*PI*
C      3INF)/(8*(J*PI)**2))-P2*((J*PI)**2)*(SUP/2.-DSIN(2*J*PI*SUP)
C      4/(4*J*PI)-FIP/2.+DSIN(2*J*PI*FIP)/(4*J*PI))+P2*((J*PI)**2)*
C      5(SUP**2/4.-SUP*JSIN(2*J*PI*SUP)/(4*J*PI)-DCOS(2*J*PI*SUP)/
C      6(8*(J*PI)**2)-FIP**2/4.+FIP*DSIN(2*J*PI*FIP)/(4*J*PI)+DCOS
C      7(2*J*PI*FIP)/(8*(J*PI)**2))
160 CONTINUE
      DO 180 J=1, M
      JJ=N+J
      DO 180 K=1, N
180 CC(JJ, K)=CC(K, JJ)
C      ===PARCELA REFERENTE A ROTACOES===
      DO 190 J=1, M
      JJ=J+N

      DO 190 K=1, M
      KK=K+N
190 CC(JJ, KK)=SIG*T3*(DSIN(J*PI*FIT)*DSIN(K*PI*FIT))+PP*GAMA*
C      1(DSIN(J*PI*FIP)*DSIN(K*PI*FIP))
200 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DETEC1(B, CN, A, N, M, FIP, SIG, CK, GAMA, ENGST1, ENGST2,
1P, PNT, EIGV, EIGVV, NN, CRIT, D1, KAPA)
C      ESTA SUB-ROTINA DETECTA POR MEIO DE ITERACOES SUCESSIVAS
C      O PARAMETRO DE CARREGAMENTO CRITICO TANTO PARA P COMO
C      PARA TO (TENSÃO NO CABO) - CASOI
      IMPLICIT REAL *3(A-H, O-Z)
      REAL *8 KAPA
      DIMENSION A(50, 50), B(50, 50), C(50, 50), D(50, 50), Q(50, 50), X(50
1, 50), CC(50, 50), CN(50, 50), EIGV(50), EEIGV(50), EIGVV(50)
      NO=5
      ERROR=0.0001
      NM=N+M
      ICONT=0
      IF(CRIT.EQ.0) GO TO 800
      PT1=EIGVV(NN)*(SIG-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGV(NN))+PNT
      PT=P
800 CONTINUE
      IF(CRIT.EQ.1) GO TO 400
      PT=EIGVV(NN)*(P-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGV(NN))+PNT
      PT1=SIG
400 CONTINUE

```

```

      ICONT=ICONT+1
      IF(CRIT.EQ.0) GO TO 900
      CALL NAXIAL(N,M,PT1,KAPA,D1,ENGST1,ENGST2,CN)
900  CONTINUE
      CALL CARGA1(N,M,FIP,PT1,CK,GAMA,PT,ENGST1,ENGST2,CC)
      DO 500 J=1,NM
      DO 500 K=1,NM
      Q(J,K)=A(J,K)
      C(J,K)=CC(J,K)+CN(J,K)
500  O(J,K)=B(J,K)-C(J,K)
      WRITE(NO,20)PT
      20  FORMAT(///,10X,'PT=',E15.5)
      WRITE(NO,30)PT1
      30  FORMAT(///,10X,'SIG=',E15.5)
      CALL REAUA(O,Q,X,EEIGV,NM)
      EIGVT=EEIGV(NN)
      IF(DABS(EIGVT)...E.ERROR) GO TO 200
      IF(EIGVT)100,200,300
100  CONTINUE
      IF(CRIT.EQ.0) GO TO 600
      XX=EIGVV(NN)*((PT1-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGVT))
      PT1=PNT+XX
      GO TO 400
600  CONTINUE
      XX=EIGVV(NN)*((PT-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGVT))
      PT=PNT+XX
      GO TO 400
300  CONTINUE
      IF(CRIT.EQ.0) GO TO 700
      XX=EIGV(NN)*((SIG-PT1)/(EIGVT-EIGV(NN)))
      PT1=SIG+XX

      GO TO 400
700  CONTINUE
      XX=EIGV(NN)*((P-PT)/(EIGVT-EIGV(NN)))
      PT=P+XX
      GO TO 400
200  CONTINUE
      IF(CRIT.EQ.0) P=PT
      IF(CRIT.EQ.1) SIG=PT1
      WRITE(NO,10)ICONT
      10  FORMAT(//,10X,'EM DETEC1 FORAM NESCESSARIAS',I10,' ITERA',
      1'COES')
      RETURN
      END
      SUBROUTINE DETEC2(B,CN,A,N,M,T1,T2,T3,FIP,SIG,GAMA,ENGST1,
      1ENGST2,P,PNT,EIGV,EIGVV,NN,CRIT,D1,KAPA)
C      ESTA SUB-ROTINA DETECTA POR MEIO DE ITERACOES SUCESSIVAS
C      O PARAMETRO DE CARREGAMENTO CRITICO TANTO PARA P COMO
C      PARA TO (TENSÃO NO CABO) - CASOII
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
      REAL *8 KAPA
      DIMENSION EIGV(50),B(50,50),O(50,50),EEIGV(50),A(50,50),
      1X(50,50),Q(50,50),EIGVV(50),C(50,50),CC(50,50),CN(50,50)
      NO=5
      ERROR=0.0001
      NM=N+M
      ICONT=0
      IF(CRIT.EQ.0) GO TO 800
      PT1=EIGVV(NN)*((SIG-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGV(NN))+PNT
      PT=P

```

```

800 CONTINUE
  IF(CRIT.EQ.1) GJ TO 400
  PT=EIGVV(NN)*(P-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGV(NN))+PNT
  PT1=SIG
400 CONTINUE
  ICONT=ICONT+1
  IF(CRIT.EQ.0) GJ TO 900
  CALL NAXIAL(N,M,PT1,KAPA,D1,ENGST1,ENGST2,CN)
900 CONTINUE
  CALL CARGA2(N,M,T1,T2,T3,FIP,PT1,GAMA,PT,ENGST1,ENGST2,CC)
  DO 500 J=1,NM
  DO 500 K=1,NM
  Q(J,K)=A(J,K)
  C(J,K)=CC(J,K)+CN(J,K)
500 D(J,K)=B(J,K)-C(J,K)
  WRITE(NO,20)PT
  20 FORMAT(///,10X,'PT=',E15.5)
  WRITE(NO,30)PT1
  30 FORMAT(///,10X,'SIG=',E15.5)
  CALL REAUVA(D,Q,X,EEIGV,NM)
  EIGVT=EEIGV(NN)
  IF(DABS(EIGVT)...E.ERROR) GO TO 200
  IF(EIGVT)100,200,300
100 CONTINUE
  IF(CRIT.EQ.0) GJ TO 600
  XX=EIGVV(NN)*((PT1-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGVT))
  PT1=PNT+XX
  GO TO 400
600 CONTINUE
  XX=EIGVV(NN)*((PT-PNT)/(EIGVV(NN)-EIGVT))
  PT=PNT+XX

```

```

GO TO 400
300 CONTINUE
  IF(CRIT.EQ.0) GJ TO 700
  XX=EIGV(NN)*((SIG-PT1)/(EIGVT-EIGV(NN)))
  PT1=SIG+XX
  GO TO 400
700 CONTINUE
  XX=EIGV(NN)*((P-PT)/(EIGVT-EIGV(NN)))
  PT=P+XX
  GO TO 400
200 CONTINUE
  IF(CRIT.EQ.0) P=PT
  IF(CRIT.EQ.1) SIG=PT1
  WRITE(NO,10)ICONT
  10 FORMAT(//,10X,'EM DETEC2 FORAM NESCESSARIAS',I10,' ITERA',
  1'COFS')
  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE REAUVA(A,B,X,EIGV,NAUV)
C  ESTA SUB-ROTINA RESOLVE O PROBLEMA DE AUTO-VALORES PELO
C  METODO DAS ROTACJES SIMULTANEAS DE JACOBI (INTERACAO
C  EM SUB-ESPACO)
  IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
  DIMENSION A(50,50),B(50,50),X(50,50),EIGV(50),D(50)
  ERRO=0.1E-04
  LW=5
  N=NAUV
  NSMAX=15
  DO 10 I=1,NAUV

```

```

      D(I)=A(I,I)/B(I,I)
10  EIGV(I)=D(I)
      IF(N-1)4,5,4
      5  CONTINUE
      RETURN
      4  DO 30 I=1,N
          DO 20 J=1,N
20   X(I,J)=0.
30   X(I,I)=1.
      NSWEP=0
      NR=N-1

C
C  ***INICIO DAS ITERACOES***
C
      WRITE(LW,1005)
1005  FORMAT(//10X,'ITERACAO EM REAUVA NO.',10X,'OS AUTOVALORES'
1, ' NESTA ITERACAO, JA CONVERGIDOS, SAO')
      40  NSWEP=NSWEP+1
          EPS=(0.01**NSWEP)**2
          DO 50 J=1,NR
              JJ=J+1
              DO 50 K=JJ,N
                  TT=A(J,K)*A(J,K)
                  TB=A(J,J)*A(K,K)
                  ETOLA=DABS(TT/TB)
                  TT=B(J,K)*B(J,K)
                  TB=B(J,J)*B(K,K)
                  ETOLB=TT/TB
                  IF(ETOLA-EPS)6,7,7
6       IF(ETOLB-EPS)50,7,7
7       AKK=A(K,K)*B(J,K)-B(K,K)*A(J,K)

          AJJ=A(J,J)*B(J,K)-B(J,J)*A(J,K)
          AB=A(J,J)*B(K,K)-A(K,K)*B(J,J)
          CHECK=(AB*AB+4.0*AKK*AJJ)/4.0
          IF(DABS(CHECK).LE.1.E-20)CHECK=DABS(CHECK)
          IF(CHECK)60,70,70
60      WRITE(LW,1004)CHECK
1004  FORMAT(//10X,'EM REAUVA SE OBTEM RAIZ QUADRADA DE UM'
1, ' NUMERO NEGATIVO',F20.7)
          STOP
70      SQCH=CHECK**0.5
          D1=AB/2.+SQCH
          D2=AB/2.-SQCH
          DEN=D1
          IF(DABS(D2)-DABS(D1))8,8,9
9       DEN=D2
8       IF(DEN)90,80,90
80      CA=0.
          CG=-A(J,K)/A(K,K)
          GO TO 100
90      CA=AKK/DEN
          CG=-AJJ/DEN

C
C  ***ROTACOES GENERALIZADAS***
C
100  IF(N-2)95,180,95
95   JP1=J+1
      JM1=J-1
      KP1=K+1
      KM1=K-1

```



```

      IF(JM1-1)120,110,110
110  DO 105 I=1,JM1
      AJ=A(I,J)
      BJ=B(I,J)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I,K)
      A(I,J)=AJ+CG*AK
      B(I,J)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
105  B(I,K)=BK+CA*BJ
120  IF(KP1-N)130,130,140
130  DO 125 I=KP1,N
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(K,I)
      BK=B(K,I)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(K,I)=AK+CA*AJ
125  B(K,I)=BK+CA*BJ
140  IF(JP1-KM1)150,150,180
150  DO 160 I=JP1,KM1
      AJ=A(J,I)
      BJ=B(J,I)
      AK=A(I,K)
      BK=B(I,K)
      A(J,I)=AJ+CG*AK
      B(J,I)=BJ+CG*BK
      A(I,K)=AK+CA*AJ
160  B(I,K)=BK+CA*BJ
180  AK=A(K,K)

```

```

      BK=B(K,K)
      A(K,K)=AK+2.*CA*A(J,K)+CA*CA*A(J,J)
      B(K,K)=BK+2.*CA*B(J,K)+CA*CA*B(J,J)
      A(J,J)=A(J,J)+2.*CG*A(J,K)+CG*CG*AK
      B(J,J)=B(J,J)+2.*CG*B(J,K)+CG*CG*BK
      A(J,K)=0.
      B(J,K)=0.

```

C

C ***AUTOVETORES***

C

```

      DO 190 I=1,N
      XJ=X(I,J)
      XK=X(I,K)
      X(I,J)=XJ+CG*XK
190  X(I,K)=XK+CA*XJ
      50 CONTINUE

```

C

C ***ESTUDO DA CONVERGENCIA***

C

```

      DO 240 I=1,N
      TOL=DABS(ERRO*D(I))
      DIF=DABS(EIGV(I)-D(I))
      IF(DIF-TOL)240,240,300
240  CONTINUE

```

C

C ***ESTUDO DOS ELEMENTOS FORA DA DIAGONAL***

C

```

      EPS=ERRO**2
      DO 260 J=1,NR

```

```

JJ=J+1
DO 260 K=JJ,N
  TT=A(J,K)*A(J,K)
  TB=A(J,J)*A(K,K)
  EPSA=DABS(TT/TB)
  TT=B(J,K)*B(J,K)
  TB=B(J,J)*B(K,K)
  EPSB=TT/TB
  IF(EPSA-EPS)11,300,300
11 IF(EPSB-EPS)260,300,300
260 CONTINUE
  DO 310 I=1,N
  DO 310 J=I,N
    B(J,I)=B(I,J)
310 A(J,I)=A(I,J)
    GO TO 21
300 DO 320 I=1,N
320 D(I)=EIGV(I)
  IF(NSWEP-NSMAX)40,13,13
  13 DO 330 I=1,N
  DO 330 J=I,N
    B(J,I)=B(I,J)
330 A(J,I)=A(I,J)
  21 CONTINUE
  WRITE(LW,1000)NSWEP
1000 FORMAT(/I21)
  DO 220 I=1,N
  220 EIGV(I)=A(I,I)/B(I,I)
  WRITE(LW,1002) (EIGV(I),I=1,N)
1002 FORMAT(/10X,6E15.5)

```

C

C ***REORDENAMENTO***

C

```

  REOR=0
  IF(REOR.EQ.0) GO TO 35
  NV1=N-1
1440 IS=0
  DO 1400 I=1,NV1
  IF(EIGV(I+1)-EIGV(I))33,1400,1400
  33 IS=IS+1
  BT=B(I+1,I+1)
  DT=EIGV(I+1)
  B(I+1,I+1)=B(I,I)
  EIGV(I+1)=EIGV(I)
  B(I,I)=BT
  EIGV(I)=DT
  DO 1420 K=1,N
  TEMP=X(K,I+1)
  X(K,I+1)=X(K,I)
1420 X(K,I)=TEMP
1400 CONTINUE
  IF(IS)1440,35,1440
  35 CONTINUE
  RETURN
  END

```

C*****

C

```

  PROGRAMA PRINCIPAL
  IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
  REAL *8 IX,IY,K1,K2,KAPA,MM(50,50)
  DIMENSION A(50,50),B(50,50),C(50,50),Q(50,50),D(50,50),

```

```

1CC(50,50),CN(50,50),EIGV(50),EIGVV(50),X(50,50)
NO=5
NI=8
WRITE(NO,41)
41 FORMAT(//,T30,'UNIDADES ADOADAS',//,T32,'AREA(CM**2)',/,
1T32,'TORCA(KGM)',/,T32,'MODULO DE ELAST.(KGM/CM**2)',/,T32,
2'MOM. DE INERCIA(CM**4)',/,T32,'COMPRIMENTO(CM)',/)
C ===LEITURA DOS DADOS===
100 CONTINUE
READ(NI,2)NP,NE,N,M
2 FORMAT(4I5)
READ(NI,4)E,G,CN,CT,IX,IY,EY
4 FORMAT(7E10.5)
READ(NI,6)AA,DA,DB,H,ZP,ZL
6 FORMAT(6E10.5)
READ(NI,8)K1,K2,T0,ENGST1,ENGST2
8 FORMAT(3E10.5,2I5)
READ(NI,10)CASOI,CASOII,CRIT,PDELTA,TDELTA
10 FORMAT(3I5,2E10.5)
WRITE(NO,15)NE
15 FORMAT(///,20X,'ESTRUTURA NUMERO=',I5)
WRITE(NO,17)
17 FORMAT(///,20X,'*** DADOS DA ESTRUTURA ***',///,15X,'**CA'
1,'RACTERISTICAS FISICAS**')
WRITE(NO,19)E,G
19 FORMAT(//,10X,'E=',E10.5,11X,'G=',E10.5)
WRITE(NO,21)
21 FORMAT(//,15X,'***CARACTERISTICAS GEOMETRICAS***')
WRITE(NO,23)CW,CT,IX,IY,EY,AA,DA,DB,ZL,ZP,H
23 FORMAT(//,9X,'CN=',E10.5,10X,'CT=',E10.5,/,9X,'IX=',E10.5
C
1,10X,'IY=',E10.5,/,9X,'EY=',E10.5,10X,'AA=',E10.5,/,9X
C
2,'DA=',E10.5,10X,'DB=',E10.5,/,9X,'ZL=',E10.5,10X,
C
3,'ZP=',E10.5,/,10X,'H=',E10.5)
WRITE(NO,25)
25 FORMAT(///,9X,'CONSTANTES DE RIGIDEZ DAS MOLAS DE TORCAO')
WRITE(NO,27)K1,K2
27 FORMAT(///,9X,'K1=',E10.5,10X,'K2=',E10.5)
WRITE(NO,29)T0
29 FORMAT(///,9X,'TENSÃO NO CABO=',E10.5)
IF(ENGST1.EQ.1) WRITE(NO,31)ENGST1
31 FORMAT(//,15X,'HA RESTRICAO A TORCAO EM UMA EXTREMIDADE,'
1,' ENGST1=',I5)
IF(ENGST2.EQ.1) WRITE(NO,33)ENGST2
33 FORMAT(//,15X,'HA RESTRICAO A TORCAO NAS DUAS EXTREMIDADES'
1,', ENGST2=',I5)
IF(CASOI.EQ.1) WRITE(NO,35)
35 FORMAT(//,15X,'CASOI=ENGASTAMENTO PERFEITO ENTRE O ',
1,'MONTANTE E A HASTE')
IF(CASOII.EQ.1) WRITE(NO,37)
37 FORMAT(//,15X,'CASOII=ENGASTAMENTO ELASTICO ENTRE O ',
1,'MONTANTE E A HASTE')
WRITE(NO,39)PDELTA,TDELTA
39 FORMAT(//,15X,'INCREMENTOS DE CARGA',/,15X,'PDELTA=',
1E10.5,/,15X,'TDELTA=',E10.5)
C ===GERACAO DOS PARAMETROS===
ZT=ZP
FIP=7P/7L

```

```

FIT=FIP
ALFA=IX/AA
BETA=IY/AA
GAMA=DA/ZL
KAPA=EY/ZL
ETA=DB/ZL
COEF1=DSQRT((G*CT)/(E*IY))
COC=DSQRT(G*CT*E*IY)
COEF2=E*CW/(ZL**2*COC)
HH=H+DB
CA=DSQRT(ZP**2+HH**2)
CB=DSQRT((ZL-ZP)**2+HH**2)
SIG=T0*(ZL**2)/COC
C   PARA SE OBTEN SIG CRITICO,FAZER CRIT=1
    IF(CRIT.EQ.1)SIG=0.
C   ===GERACAO DAS CONSTANTES===
    A1=1.
    A2=KAPA
    A3=(ALFA+BETA)/(ZL**2)+(KAPA**2)
    B1=1./COEF1
    B2=COEF1
    B3=COEF2
    K1=K1*ZL/COC
    K2=K2*ZL/COC
    D1=((ZP*(CB-CA))+CA*ZL)/(CA*CB))
    C1=2*((ZL/H)**2)
    C2=(2./H+(2*DB/(H**2)))*ZL
    C3=2*(1.+(DB/H))**2
    CK=2*((CB+CA)*HH/(CA*CB))
    T1=CK*(ZL/H)
    T2=CK*(DB/H)

    T3=CK*(DB**2/(H*ZL)+DB/ZL)
    NM=N+M
C
C   ===CHAMADA DA SUB-ROTINA MOV===
C
    CALL MOV(N,M,A1,A2,A3,ENGST1,ENGST2,A)
C
C   ===CHAMADA DA SUB-ROTINA RIG===
C
    CALL RIG(N,M,B1,B2,B3,ENGST1,ENGST2,B)
    IF(CASOI.EQ.0) GO TO 250
C
C   ===CHAMADA DA SUB-ROTINA MOLAI===
C
    CALL MOLAI(N,M,K1,ENGST1,MM)
250 CONTINUE
    IF(CASOII.EQ.0) GO TO 260
C
C   ===CHAMADA DA SUB-ROTINA MOLAI2===
C
    CALL MOLAI2(N,M,C1,C2,C3,K1,K2,FIT,ENGST1,ENGST2,MM)
260 CONTINUE
    DO 110 J=1,NM
    DO 110 K=1,NM
110 B(J,K)=B(J,K)+MM(J,K)
190 CONTINUE
C
C   ===CHAMADA DA SUB-ROTINA NAXIAL===
C

```

```

CALL NAXIAL(N,M,SIG,KAPA,D1,ENGST1,ENGST2,CN)
P=0.
180 CONTINUE
PP=P
WRITE(NO,1)PP
1 FORMAT(//,10X,'P=',E15.5)
WRITE(NO,9) SIG
9 FORMAT(//,10X,'SIG=',E15.5)
IF(CASOI.EQ.0) GO TO 270

C
C ===CHAMADA DA SUB-ROTINA CARGA1===
C
CALL CARGA1(N,M,FIP,SIG,CK,GAMA,PP,ENGST1,ENGST2,CC)
270 CONTINUE
IF(CASOII.EQ.0) GO TO 280

C
C ===CHAMADA DA SUB-ROTINA CARGA2===
C
CALL CARGA2(N,M,T1,T2,T3,FIP,SIG,GAMA,PP,ENGST1,ENGST2,CC)
280 CONTINUE
DO 120 J=1,NM
DO 120 K=1,NM
Q(J,K)=A(J,K)
C(J,K)=CC(J,K)+CN(J,K)
120 O(J,K)=B(J,K)-C(J,K)

C ===CHAMADA DA SUB-ROTINA REAUVA===
CALL REAUVA(O,Q,X,EIGV,NM)
I=0
170 I=I+1
IF(I.GT.NM) GO TO 130
IF(EIGV(I))140,150,160
160 EIGVV(I)=EIGV(I)

GO TO 170
130 CONTINUE
IF(CRIT.EQ.1) GO TO 240
PNT=PP
P=P+PDELTA
GO TO 180
240 CONTINUE
IF(CRIT.EQ.0) GO TO 200
PNT=SIG
SIG=SIG+TDELTA
GO TO 190
200 CONTINUE
140 CONTINUE
NN=I
WRITE(NO,7)
7 FORMAT(///,'***UTILIZACAO DA SUBROTINA DETECT PARA DETERMI'
1,'NAR O PARAMETRO DE CARGA CRITICO***')
IF(CASOI.EQ.0) GO TO 290

C ===CHAMADA DA SUB-ROTINA DETEC1===
CALL DETEC1(B,CN,A,N,M,FIP,SIG,CK,GAMA,ENGST1,ENGST2,P,PNT,
1EIGV,EIGVV,NN,CRIT,D1,KAPA)
290 CONTINUE
IF(CASOII.EQ.0) GO TO 210

C ===CHAMADA DA SUB-ROTINA DETEC2===
CALL DETEC2(B,CN,A,N,M,T1,T2,T3,FIP,SIG,GAMA,ENGST1,ENGST2,P,PNT,
1EIGV,EIGVV,NN,CRIT,D1,KAPA)
210 CONTINUE
150 CONTINUE
C ===IMPRESSAO DOS RESULTADOS===

```

```
      IF(CRIT.EQ.0) GJ TO 230
      WRITE(NO,11)
11  FORMAT(//,20X,'***TENSAO NO CABO QUE PROVOCA INSTABILIDADE'
1, '***')
      WRITE(NO,13)SIG
13  FORMAT(23X,'TO CRITICO=',E20.8)
230  CONTINUE
      IF(CRIT.EQ.1) GJ TO 220
      WRITE(NO,3)
3   FORMAT(//,20X,'***CARGA CRITICA DE FLAMBAGEM***',//)
      WRITE(NO,5)P
5   FORMAT(23X,'P CRITICO=',E20.8)
220  CONTINUE
      IF(NP.EQ.1) GO TO 100
      CALL EXIT
      END
```

-66-

$$V_M = \int_0^L \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz$$

(3.10)

-121-

$$A + \left(\frac{2a}{3} \right) B$$

folte")

Derivada de
(6.29)

verificor
(6.30)

$$B^P = \frac{20}{192} L^2$$

pg 28

f_{III}^c

$f_{III}^c = 0.1911 = 3$

$\approx D_{III}^c$

(2.35)

M_3

(0.511)

D_{55}^c

(2)

-119-

(6.24)

~~(6.24)~~

-pg 25-

$$u_i^{(1)} = \frac{du_i}{du} \quad 1$$

Bibliografie
1331

-48-

, este nu
des autorului
care a putut
sa scrie
o parte, o
măsură pentru
un "cont
critic".

-112-

$$- \left(\frac{10L}{a} \right)$$

-102-

$$z_p \rightarrow x_p$$

85-

$$+ (Pa - 10) \frac{\sigma^2}{2}$$

$z_p = z_r$

$$- (100)$$

(4.3)

-182-

do

121-

$$B^P = \frac{20}{192} L^3$$

(3)

work